

Estrategia pedagógica para modelar sistemas de colas a partir de datos reales

Pedagogical strategy to model queuing systems from real data

Víctor-Miguel Burbano-Pantoja¹

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja, Colombia
victor.burbano@uptc.edu.co.

Margoth-Adriana Valdivieso-Miranda²

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja, Colombia
margoth.valdivieso@uptc.edu.co

Angela-Saray Burbano-Valdivieso³

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Tunja, Colombia
aangela.burbano@uptc.edu.co

Cómo citar/ How to cite: Burbano, V., Valdivieso, M. & Burbano, A. (2025). Estrategia pedagógica para modelar sistemas de colas a partir de datos reales. *Revista Saber, Ciencia y Libertad*, 20(1), 211 – 230. <https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2025v20n1.12614>

Resumen

En los ámbitos educacional y administrativo, frecuentemente se planifican y ejecutan diversas estrategias para potenciar el aprendizaje de las distintas ciencias en el estudiantado y optimizar la prestación de algunos servicios con una buena capacidad operativa y tiempos de espera pequeños. Este trabajo investigativo tuvo como objetivo modelizar el Sistema de Colas (SDC) el restaurante estudiantil de la Universidad

Fecha de recepción: 19 de septiembre de 2024 Este es un artículo Open Access bajo la licencia BY-NC-SA
Fecha de evaluación: 30 de octubre de 2024 (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>)
Fecha de aceptación: 7 de diciembre de 2024 Published by Universidad Libre

Este trabajo corresponde a uno de los resultados del proyecto de investigación titulado “Modelos estocásticos en teoría de colas y líneas de espera” financiado por la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

- 1 Doctor en Ciencias de la Educación, profesor-investigador Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Grupo de investigación GICI.
- 2 Magíster en Ciencias-Estadística, docente-investigadora Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- 3 Bióloga, maestrante en Ciencias-Biología. Tecnóloga en programación de sistemas. Investigadora Grupo GICI. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Pedagógica y Tecnológica de Colombia a través de modelos probabilísticos y medidas de eficiencia asociadas con sus parámetros. La metodología fue empírico-analítica que se ha centrado en un diseño observacional-transversal. La data fue recogida mediante observación directa que incluyó la cantidad de usuarios que arribaron a la Línea de Espera (LDE) del citado restaurante, quienes fueron servidos en periodos de diez minutos para almorzar. Los resultados permitieron establecer que, los datos eran susceptibles de ajustarse a modelos de probabilidad de Poisson y exponenciales, el SDC operaba con buena estabilidad, reducidos tiempos de espera y cortos tiempos para ejecutar los servicios. Se ha logrado concluir que, el mencionado SDC ha mostrado un altísimo porcentaje (90.64%) de usos por parte de los estudiantes beneficiarios.

Palabras clave

Líneas de espera, modelos de probabilidad, medidas de eficiencia, estrategia pedagógica.

Abstract

In the educational and administrative fields, various strategies are frequently planned and implemented to enhance the learning of different sciences among students and to optimize the provision of some services with good operational capacity and short waiting times. This research work aimed to model the Queuing System (QS) of the student restaurant of the 'Pedagogical y Technological of Colombia' University through probabilistic models and efficiency measures associated with its parameters. The methodology was empirical-analytical that has focused on an observational 'cross-sectional' design. The data was collected through direct-observation that included the number of users who arrived at the Waiting Line (WL) of the aforementioned restaurant, who were served in ten-minute periods for lunch. The results allowed to establish that the data were susceptible to adjusting to Poisson and exponential probability models, the QS operated with good stability, reduced waiting times and short times to execute the services. It has been concluded that the aforementioned QS has shown a very high percentage (90.64%) of uses by the beneficiary students.

Keywords

Waiting lines; probability models; efficiency measures; pedagogical strategy.

Introducción

Históricamente, la niñez y adolescencia son considerados un grupo vulnerable en el ámbito educativo, con frecuencia se diseñan e implementan diversos tipos de estrategias pedagógicas para orientar el aprendizaje de determinados tópicos en las ciencias exactas, ingenierías o en las ciencias sociales; por ejemplo, Gabalán y Vásquez (2021) han implementado una propuesta metodológica y didáctica destinada al fomento del aprendizaje de la investigación operativa a través de modelos estadísticos, Munevar, Burbano y Valdivieso (2021) elaboraron una propuesta de tipo pedagógico para mitigar la agregación en el estudiantado a través de la construcción de escenarios pacíficos, Pérez y Ricardo (2021) indagaron sobre ambientes de aprendizaje enriquecidos con TIC, Gonçalves et al. (2020) han propuesto el uso de modelos de SDC para la gestión pública escolar, Juárez, Chamoso y González (2020) han incluido los foros virtuales para integrar el modelaje matemático al formar ingenieros, sólo por mencionar algunos.

La modelación matemática se usa en diferentes ámbitos investigativos tales como la enseñanza de las ciencias, las ingenierías, economía y la misma matemática, entre otros; se trata de representar la realidad con diversos propósitos y distintos alcances a fin de matematizar ideas específicas, prácticas cotidianas o determinados procedimientos que involucren datos reales (Villa y Alencar, 2019). En algunos contextos reales, resulta conveniente recurrir a modelos abstractos que incluyen tanto ‘variables aleatorias’ como deterministas en un proceso secuenciado de actividades tendientes a resolver un problema real (Burbano, Valdivieso y Burbano, 2021). Generalmente, los procesos de aprendizaje estudiantil resultan exitosos cuando en la interacción docente-estudiante se usan distintos modelos de forma didáctica para el micro-currículo universitario (Huincahue, Borromeo & Mena, 2018) en tanto que tales modelos podrían crear percepciones y actitudes positivas en el estudiantado en los casos en los que se involucran datos provenientes del contexto real (Özdemir y Üzel, 2012).

Por ejemplo, en diversas circunstancias, las personas se ven avocadas a realizar colas o filas con el fin tener acceso a servicios específicos o adquirir ciertos produc-

tos y los administradores han de prever que la prestación de tales servicios se haga en el menor tiempo posible. Una estrategia pedagógica que posibilita optimizar la administración de ciertas LDE, se soporta en la implementación de distribuciones de probabilidad adecuadas para modelar el comportamiento de los sistemas presentes en estos ámbitos (Klimenok et al., 2020; Piratelli, Achcar y Sandrim, 2015). En la vida diaria es común hacer colas pagar en los bancos y las tiendas de abarrotes, entrar al cine o acceder al restaurante para almorzar, entre otros (Vergara, 2019); de manera formal, estos fenómenos de colas que generalmente involucran tiempos de espera se pueden modelar con distribuciones de probabilidad y teoría estadística a fin de optimizar su funcionamiento (Rivera et al., 2024).

Para un SDC, una etapa del modelaje involucra la cuantificación del llamado ‘tiempo de espera’ del usuario en las colas y del denominado ‘tiempo usado durante el servicio’, por medio de distintas medidas de eficiencia (Taha, 2011; Lee et al., 2024). Es conveniente mencionar que, una capacidad alta de ‘servicios’ puede ocasionar costes altos de operación; una forma tangible de conseguir un pertinente equilibrio entre un servicio con calidad y su respectivo costo operacional consiste en elaborar y ejecutar modelos de LDE que sean pertinente (Lazo y Vivanco, 2023). En estas circunstancias, diversos restaurantes universitarios prestan un servicio indispensable al estudiantado, quienes recurren a este servicio subsidiado porque le implica un bajo costo y esperan ser atendidos dentro de la universidad en el menor tiempo posible. En este sentido, la pregunta que guio este trabajo investigativo fue ¿Cuáles modelos probabilísticos pueden ajustarse para representar el SDC correspondiente al restaurant en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia-UPTC-?

Marco teórico

En general un sistema puede describirse, representarse, modelarse o simularse por medio componentes debidamente estructuradas (Flores-Tapia y Flores-Cevallos, 2021); en este escenario, se sugiere implementar una estrategia pedagógica que puede involucrar el siguiente algoritmo: a) observación del SDC b) análisis de la problemática por resolver, c) recolección de datos reales, d) modelización matemática, e) estimación de los parámetros, y f) optimización de los modelos considerados (Burbano et al., 2021). En concreto, los SDC también involucran componentes, entre ellos, clientes, capacidad de operación real y el servicio por prestar; además, pueden modelarse a través de ‘variables aleatorias’ y distribuciones probabilísticas e incluso simulaciones no deterministas (Sánchez, Sánchez y Gómez, 2024); en esta clase de sistema resulta prioritario establecer la tasa de servicio

para determinar un equilibrio entre los costos operativos y los denominados ‘tiempos de espera’ (Pérez, Márquez y Rosales, 2019).

Según Hess & Grbčić (2019) y Burbano et al. (2021), un SDC puede incluir componentes como: a) usuarios, b) clientes en el SDC, c) usuarios por ser atendidos; ahora si α representa la ‘tasa promedio’ de llegada, entonces interesa obtener $1/\alpha$ llamado ‘tiempo medio entre llegas’, c) capacidad de operación conformada por uno o más servidores, la cual genera una tasa de servicio, d) si β representa la media de clientes atendidos en cada lapso de tiempo, entonces se requiere obtener el ‘tiempo esperado de servicio’ dado por $1/\beta$, e) # de canales (filas), y f) una disciplina para las cola. Siguiendo a Hillier y Lieberman (2010), en una cola, los clientes son la fuente de entrada al sistema, el cual mediante un protocolo atiende al usuario, quien finalmente, abandona el sistema. Para modelar un SDC se ha de estimar un patrón (función probabilística) tanto para describir las llegadas como los servicios efectuados (Buchholz y Kriege, 2017). Generalmente, este tipo de fenómenos inciertos son susceptibles de modelarse con distribuciones probabilísticas específicas (Arikatla, Swamy y Prasad, 2021; Thaha, 2011).

De acuerdo con Horváth (2012), en los SDC frecuentemente se recurre a denotar la estructura del modelo por medio de $M/S/C$, según Burbano et al. (2021), M hace referencia al modelo probabilístico para estimar las llegadas de clientes, S denota una función probabilística para estimar los servicios y C indica la cantidad de canales. En esta estructura, se sugiere usar funciones probabilísticas como la exponencial, la de Poisson y la de Erlang respectivamente, sin descartar otras como la de Weibull o la Gamma, solo por indicar algunas (Vargas, Causado & Mercado, 2020). En ciertos casos, los SDC por modelar pueden presentar una sola línea de espera (cola) provistos de un solo servidor, los cuales se denotan con $M/S/1$ tal como se ha observado en la entrada y la baranda interna en el restaurant-UPTC.

Por otra parte, la manera como los usuarios son administrados para prestarles un servicio se denomina disciplina de colas (protocolo); el protocolo más frecuente es el PLPA o disciplina de primer usuario que llega, primero que se atiende (Brugno, Dudin y Manzo, 2018). Otro protocolo privilegia la atención en atender de primero al último cliente que haya llegado, en otro caso, también se puede usar un método aleatorio de atención. Además, según Rovetto et al. (2023), en el modelaje de un SDC, las LDE poder considerarse tanto finitas como infinitas en consonancia con su capacidad instalada (operativa). En un SDC hay dos periodos básicos, en el primero el sistema opera de manera inestable hasta lograr el flujo pertinente de clientes, y

en el segundo el sistema se estabiliza con un flujo casi constante; de acuerdo con Mustafa (2020), para el análisis de eficiencia del sistema se aconseja escoger un periodo de tiempo en el cual tal sistema haya alcanzado un estado estable, lo anterior con el fin de determinar ciertas medidas de eficiencia (Brugno et al., 2018).

Antecedentes

La teoría de colas ha tenido diversas aplicaciones en distintos ámbitos del quehacer humano y la investigación científica, desde sus orígenes al empezar el siglo pasado, las estrategias de líneas de espera se han constituido en un insumo para la administración de procesos en economía, ingeniería, comunicaciones, informática, la industria y el transporte (D'apice, D'ariento, Dudin & Manzo, 2023); en el modelaje de eventos aleatorios asociados con las LDE, se ha usado diferentes modelos de probabilidad en dependencia objetivo que se persiga (Ross, 1999; Vargas et al., 2020); sin embargo, en las dos últimas décadas, también se ha decidido trabajar con métodos de simulación tanto de eventos discretos como continuos (Estrada et al., 2019) con el propósito de presentar métodos alternativos a los tradicionales en cuanto al modelaje de SDC tanto nacional como internacional mente.

En seguida, se mencionan variados trabajos realizados en escenarios internacionales que aportaron con elementos analógicos para implementar el presente trabajo. El equipo de Estrada et al. (2019) ha implementado un modelamiento híbrido para un SDC mediante el uso de un algoritmo evolutivo para analizar un sitio de comidas rápidas; Piratelli et al. (2015) analizaron los tiempos entre llegadas de lotes en una industria alimentaria y las modelaron con una distribución de Weibull; Pérez et al. (2019) aplicaron técnicas de investigación de operaciones (LDE) para modelar el trabajo por cuenta propia; diseñaron y analizaron un modelo para gestión de urgencias hospitalarias; Parra y Gallego (1999) elaboran modelos de mercadeo aplicando SDC; Sánchez et al. (2024) efectuaron un modelado para gestionar flujos de pacientes; Pulido et al. (2022) proponen un modelamiento para LDE en servicios portuarios. Lizárraga, Gómez y Paredes (2017) modelan sistemas de LDE para mejorar el servicio en una entidad financiera.

En el contexto colombiano, Gómez, Luna y Ruíz (2018), simulan SDC en un terminal de transportes; Vargas et al. (2020) usaron el modelo Weibull para describir la repartición de refrigerios en la universidad pública del Magdalena; Lazo y Vivanco (2023) evalúan un modelo para mejorar la atención al cliente en un SDC; Arroyo et al. (2014) utilizan diferentes modelos probabilísticos discretos para modelar

SDC; además, Vergara (2019) aplica el modelaje de SDC para una biblioteca en una universidad del caribe colombiano. Estos antecedentes aportan elementos para generar una estrategia pedagógica que permita modelizar tanto tiempos de servicio como de espera en el restaurant-UPTC a partir de data real y a su vez sirva de modelo para promover el aprendizaje de la modelización matemática en contextos reales.

Metodología

Este estudio se fundamentó con elementos propios de un enfoque cuantitativo centrados en una metodología empírico-analítica (Inche et al., 2023), focalizado en modelar el SDC asociado con el acceso al servicio ofrecido por el restaurant-UPTC ubicado en Tunja-Colombia. En este escenario, se emplearon métodos de tipo estadístico para ajustar los datos reales con ciertos modelos no deterministas que permitieron hacer una exploración y descripción sobre los tiempos en la LDE que el estudiantado hacía para entrar al restaurante universitario y los de servicio en la baranda al recibir su pedido. Para los primeros se recurrió al uso de una variable discreta, mientras que para los segundos se usó una de tipo continuo, en días escogidos de modo aleatorio, al medio día, considerando periodos de tiempo de 10 minutos se contó el número de usuarios en la LDE y en la baranda de servicio de dicho restaurante, en el mismo intervalo de tiempo.

En el modelaje de SDC reales, se requiere tener presentes dos directrices (Bonfante et al., 2020): a) seleccionar un modelo probabilístico adecuado para representar al SDC y establecer algunas medidas de eficiencia, b) elaborar un modelo para tomar decisiones sobre la operación del ‘sistema’ con base en dichas medidas. En la implementación de la estrategia didáctica tales directrices fueron relevantes puesto que el SDC referido al restaurante fue explorado cuando estuvo en servicio pleno; en estas circunstancias, se determinó un tamaño muestral constituido por 100 periodos de tiempo tanto para las llegadas a la puerta del restaurante como para las salidas de la baranda, esta muestra se asoció con una población indefinida de periodos temporales durante los días de funcionamiento del mencionado restaurante.

En el modelado del SDC como estrategia pedagógica, involucró las siguientes fases: a) orientaciones al estudiantado que voluntariamente estaba dispuesto a aprehender aspectos inherentes con el modelado de fenómenos inciertos, b) observación y registro cuidadoso de los datos en una ‘rejilla’ construida para tal fin,

allí se involucró un grupo constituido por 15 estudiantes a quienes se acompañó permanentemente con la asesoría de los tres investigadores, c) observación de la parte operativa de la construcción de modelos (Trejo, Lara & Flores, 2022), así: i) depuración de datos y ajuste de modelos (Poisson y exponenciales), ii) proceso para estimar ‘parámetros’ con los datos reales, iii) estructuración de los modelos, iv) usar los modelos obtenidos para efectuar algunos pronósticos y establecer la eficiencia del SDC, d) reflexionar sobre la vida del SDC y los aprendizajes para el estudiantado.

Puesto que los modelos propuestos no son los únicos en el modelaje del SDC y puede existir incertidumbre en las llegadas a la LDE (Piratelli et al., 2015), los resultados provenientes de cada modelos describieron de manera aproximada el comportamiento del SDC referido al restaurante estudiantil y posibilitaron la formulación de inferencias respecto a eventos relacionados con los arribos a la LDE y los servicios en la baranda en horarios y días semejantes. Estos obstáculos son recurrentes en el modelamiento de SDC y pueden atribuirse a diversos factores, entre ellos a la construcción de modelos poco flexibles que simulan la realidad de forma parcializada pero que se pueden superar con el refinamiento de los mismos (Brugno et al., 2018; Taha, 2011).

El análisis de la data fue elaborado por medio del paquete R (Burbano et al., 2021), el cual ha posibilitado la exploración de la data y el reporte de valores de tanto de medidas descriptivas como probabilidades inherentes a este tipo de trabajo. Los datos fueron recogidos en los meses tanto de marzo como de abril de 2023 y utilizados con propósitos pedagógicos e investigativos de acuerdo con la Ley de Habeas data. El restaurante estudiantil correspondiente al SDC objeto de estudio es una edificación amplia de una sola planta, ésta dispone de la infra-estructura requerida para servir a por lo menos 3000 individuos por día; la información que aquí se ha analizado fue recopilada en los horarios del medio día, de 11:45 am. Hasta las 2:45 pm.

Resultados

Los resultados de este trabajo investigativo se han estructurado en tres subsecciones, en la primera se presentan los hallazgos correspondientes a las llegadas a la cola del restaurante; en la segunda, se describen los resultados relacionados con la salida de los estudiantes de la baranda, una vez recibieron su almuerzo, y en la tercera, se resumen algunas medidas de eficiencia.

Llegadas a la cola del restaurante

En principio, con base en un proceso de pilotaje sobre los individuos que arribaron al restaurante en 14 periodos de tiempo, se estableció un tamaño muestral de 100 a través de la expresión: $n = Z^2 S^2 / e^2$ (Burbano et al., 2021, p. 445); los 14 datos permitieron obtener una media de 72 y una varianza corregida de $S^2 = 119.9$, el valor de Z fue de 1.96 para un 95% de confianza, fue asumido un error de 2.98% de la media; es decir $e = 0.0298 (72) = 2.1456$; en estas circunstancias, se aplicó la expresión (1):

$$n = \frac{Z^2 S^2}{e^2} = \frac{(1.96)^2 (119.9)}{(2.1456)^2} = \frac{(3.8416)(119.9)}{4.6035} \cong 100 \quad (1)$$

Tabla 1.

Cantidad de usuarios que arribaron a la LDE-restaurante por periodo temporal.

Periodo	Cantidad de usuarios	Periodo	Cantidad de usuarios	Periodo	Cantidad de usuarios	Periodo	Cantidad de usuarios
1	62	26	75	51	80	76	84
2	51	27	75	52	80	77	84
3	67	28	75	53	80	78	84
4	69	29	75	54	79	79	85
5	70	30	75	55	80	80	85
6	70	31	75	56	81	81	86
7	70	32	76	57	81	82	86
8	71	33	77	58	81	83	87
9	71	34	77	59	81	84	87
10	71	35	77	60	81	85	88
11	71	36	78	61	82	86	88
12	71	37	78	62	82	87	89
13	72	38	78	63	82	88	89
14	72	39	78	64	82	89	90
15	73	40	78	65	82	90	89
16	73	41	78	66	82	91	88
17	73	42	78	67	82	92	87
18	73	43	79	68	83	93	91
19	74	44	79	69	83	94	112
20	74	45	79	70	83	95	107
21	74	46	79	71	83	96	102
22	74	47	80	72	83	97	88

Periodo	Cantidad de usuarios	Periodo	Cantidad de usuarios	Periodo	Cantidad de usuarios	Periodo	Cantidad de usuarios
23	74	48	80	73	83	98	89
24	74	49	80	74	84	99	89
25	74	50	80	75	84	100	90

Fuente: elaboración de los autores

Por lo tanto, para cada uno de los 100 periodos de tiempo, se definió la siguiente variable X : cantidad de usuarios que arriban a la cola del restaurante por cada periodo (ver Tabla 1). A través de la exploración estadística de los datos, se determinó que X podía ser ajustada por el modelo no determinista (Probabilístico) de Poisson (MDPP). En este escenario, de acuerdo con Burbano et al. (2021), el estimador máximo-verosímil para el parámetro ' α ' del MDPP, se calcula mediante la expresión (2).

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{7995}{100} = 79.95 \quad (2)$$

Por otra parte, al estudiantado participante se le permitió interactuar con los datos crudos y mediante procedimientos manuales también obtuvieron el valor medio de 79.95, mismo que también lo determinaron a través del paquete R; otras medidas descriptivas que fueron establecidas son: una desviación típica (DT) igual a 8.175, un valor mínimo de 51 y otro valor máximo de 112; esto era un indicativo de que la cantidad de usuarios que arribaron al SDC del restaurante varió desde 51 a 112. La variabilidad de la data fue de $8.175/79.95 = 0.1022 = 10.22\%$, la cual puede considerarse baja con valor estimado para la media de 79.95; en seguida, había que utilizar la prueba estadística K-S con el fin de establecer si la data podía ajustarse al MDPP de parámetro ' $\alpha = 79.95$ ' como se indica en la expresión (3), adoptándose los siguientes pasos:

i) MDPP propuesto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!} & \text{Si } x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

ii) hipótesis a ser probadas

H_0 : la data se ajusta a $f(x)$ MDPP con $\alpha = 79.95$

H_1 : la data no se ajusta a $f(x)$ MDPP con $\alpha = 79.95$

iii) mediante el paquete R para una significación de 5%, el p-valor que se obtuvo fue de 0.493, el cual ratificó que la data si se ajustaba a $f(x)$.

En estas circunstancias, el fenómeno aleatorio referente a la cantidad de usuarios que arribaron a la LDE del restaurant, de acuerdo con Hess & Grbčić (2019), puede modelarse a través del ‘proceso de Poisson’ que se observa en la expresión (4).

$$P_x(t) = \frac{(\alpha t)^x e^{-\alpha t}}{x!} = \frac{(79.95t)^x e^{-79.95t}}{x!} \text{ para cuando } x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

En concordancia con Hess & Grbčić (2019), para el proceso (4) con parámetro αt , una distribución probabilística que modela los denominados ‘tiempos transcurridos entre llegadas’ corresponde a una ‘exponencial’ que incluye α , definida mediante (5).

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 79.95e^{-79.95t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } t < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Con base en este modelo, resulta que $\alpha = 79.95$ hace referencia a la tasa de arribos a la puerta del SDC del restaurante. Por consiguiente, alrededor de 80 usuarios llegan a la mencionada puerta por periodo (diez minutos); puesto que una hora es igual a seis periodos de tiempo, entonces $\alpha t = 79.95(6) = 479.7 \cong 480$ individuos han arribado al SDC del restaurante entre las 11:45 am y las 12:45 para recibir su almuerzo.

Salidas de la baranda del restaurante estudiantil

De manera simultánea, con la participación del grupo de estudiantes voluntarios fueron tomados 100 periodos de tiempo en la salida de la baranda del restaurant; a quienes también se les comentó que era pertinente definir una nueva variable para modelar esta otra parte del servicio de restaurant, definiéndose Y : cantidad de personas (usuarios) servidos al pasar por la baranda del restaurant universitario, quienes han de dirigirse a las mesas dispuestas para almorzar (ver Tabla 2). Por medio de una exploración estadística de la data, se presumió que Y podía ser representada por otro MDPP. En este escenario, nuevamente, el estimador máximo-verosímil para el parámetro ‘ β ’ de este modelo se calculó recurriendo a la expresión (6).

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} y_i = \frac{8820}{100} = 88.2 \quad (6)$$

Tabla 2.*Cantidad de personas servidas en la baranda del restaurante.*

Periodo	Servidos	Periodo	Servidos	Periodo	Servidos	Periodo	Servidos
1	84	26	90	51	84	76	89
2	93	27	89	52	85	77	90
3	74	28	84	53	89	78	81
4	96	29	96	54	84	79	75
5	105	30	86	55	104	80	89
6	106	31	83	56	83	81	92
7	84	32	88	57	76	82	89
8	88	33	95	58	87	83	105
9	83	34	106	59	84	84	95
10	112	35	101	60	76	85	89
11	81	36	86	61	90	86	93
12	88	37	86	62	95	87	85
13	93	38	79	63	68	88	80
14	93	39	80	64	87	89	96
15	78	40	97	65	84	90	92
16	87	41	82	66	89	91	105
17	78	42	70	67	82	92	95
18	98	43	93	68	110	93	89
19	81	44	87	69	103	94	100
20	94	45	83	70	85	95	64
21	87	46	92	71	71	96	80
22	69	47	97	72	84	97	93
23	92	48	85	73	84	98	85
24	89	49	89	74	89	99	80
25	97	50	76	75	90	100	96

Fuente: elaboración de autores

Por otro lado, el grupo de participantes ahora decidió involucrarse con mayor intensidad en los procesos de modelaje en la baranda y por medio de procedimientos digitales con el paquete R obtuvieron el valor medio de 88.2, mismo que fue ratificado por los investigadores que los monitorearon; asimismo, se determinó una DT igual a 9.126, un valor mínimo de 64 y otro valor máximo de 112; estos valores fueron un indicativo de que la cantidad de personas servidas en la baranda del restaurante osciló desde 64 hasta 112. Así, la variabilidad de la data presentada en la Tabla 2 fue de $9.126/88.2 = 0.1034 = 10.34\%$, la cual resultó levemente mayor a la obtenida en la LDE, pero que sigue siendo baja. A continuación, se recurrió al

uso de una K-S destinada a establecer si la data de la baranda era susceptible de ajustarse al MDPP de parámetro ‘ $\beta = 88.2$ ’ como se observa en la expresión (7), el grupo optó ejecutar otra vez, los siguientes pasos:

i) MDPP propuesto

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\beta^y e^{-\beta}}{y!} & \text{cuando } y = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ 0 & \text{Cuando } y \text{ tome otros valores} \end{cases} \quad (7)$$

ii) hipótesis por probar

H_0 : la data se ajusta a $g(y)$ MDPP con $\beta = 88.2$

H_1 : la data no se ajusta a $g(y)$ MDPP con $\beta = 88.2$

iii) A través del paquete R para una significancia del 5%, el p-valor que se ha obtenido fue de 0.889, este valor ratificó que la data si se ajustaba a $g(y)$.

En estas circunstancias, el grupo de colaboradores mencionó que el comportamiento aleatorio en la baranda referido a la cantidad de personas servidas, en concordancia con Hess & Grbčić (2019), podía modelarse con ‘el proceso’ indicado en la expresión (8).

$$P_Y(t) = \frac{(\beta t)^y e^{-\beta t}}{y!} = \frac{(88.2t)^y e^{-88.2t}}{y!} \text{ para cuando } y = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8)$$

En concordancia con Hess & Grbčić (2019), para el proceso (8) con parámetro βt , una distribución probabilística que modela los llamados ‘tiempos de servicio’ corresponde a una ‘exponencial’ que incluye β , definida a través de (9).

$$g(t) = \begin{cases} \beta e^{-\beta t} & \text{para cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 88.2 e^{-88.2t} & \text{para cuando } t \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } t < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Con fundamento en el modelo (9), resulta que, $\beta = 88.2$ referencia a la ‘tasa de servicios’ presente en la baranda del restaurante. Por lo tanto, aproximadamente 88 personas son servidas en cada periodo (diez minutos); en vista de que una hora equivale a seis periodos de tiempo, entonces $\beta t = 88.2(6) = 529.2 \cong 529$ usuarios (personas) han sido atendidas en la mencionada baranda desde las 11:45 am y las 12:45 para proporcionarles su almuerzo.

Algunas medidas de eficiencia para el SDC del restaurante

En principio, se ha podido determinar que el SDC del restaurante operaba de forma eficiente y estable y con la capacidad requerida para atender al estudiantado. Con el propósito de establecer algunas medidas de eficiencia, en las secciones precedentes se determinó que X seguía un MDPP con $\alpha = 79.95$ por periodo de tiempo t . De acuerdo con Harris & Gross (2014), los ‘tiempos transcurridos entre llegadas’ se corresponden con un modelo exponencial cuyo valor esperado queda determinado por $E(X) = 1/\alpha = 1/79.95 = 0.0125$ de un periodo de diez minutos o de forma análoga, el promedio de los ‘tiempos transcurridos entre llegadas’ fue de 7.51 segundos. Por otro lado, se estableció que Y también se ajustó a un MDPP con tasa de servicios dada por $\beta = 88.2$ por periodo de tiempo, también en este caso, los ‘tiempos por cada servicio’ se corresponden con otro modelo exponencial con valor esperado $E(Y) = 1/\beta = 1/88.2 = 0.0113$ de un periodo de diez minutos o de forma análoga, la media de los tiempos por cada servicio efectuado de 6.78 segundos. En este contexto, en seguida, se resumen otros hallazgos tales como: i) el uso que en promedio hace el estudiantado del SDC del restaurante fue $\tau = \alpha/\beta = 79.95/88.2 = 0.9064 = 90.64\%$, ii) la cantidad esperada de personas en el SDC fue $L = \tau/(1-\tau) = 0.9064/0.0936 = 9.6837$ que corresponde a 10 personas aproximadamente, iii) el tiempo total hasta que la persona fue servida resultó ser de $W = L/\alpha = 9.6837/79.95 = 0.1211$.

Discusión resultados

En este trabajo, se ha alcanzado el objetivo de modelizar el SDC del restaurant-UPTC-Tunja a través de MDPP tanto para la data perteneciente a X como para la de Y , con valores específicos para los parámetros α y β respectivamente; según Hess & Grbčić (2019) y Harris & Gross (2014), tales parámetros a su vez forman parte de los modelos exponenciales que, representaron la ‘tasa media de arribos y de servicio’ respectivamente y posibilitaron la obtención de algunas medidas de eficiencia asociadas con sus parámetros; además, se logró determinar que el mencionado SDC se ajustó a la estructura $M/S/1$. Además, la interacción estudiante-investigadores ha generado procesos de cognición percibidos como novedosos y exitosos por parte del grupo de estudiantes voluntarios que participaron activamente en esta experiencia, apreciaciones que concuerdan con lo expuesto por Huincahue et al. (2018).

En consecuencia, se deduce de forma analítica que, en promedio, aproximadamente 529 personas (usuarios) fueron servidos por hora en el SDC del restaurante, quienes fueron atendidos de manera adecuada en la baranda del restaurante desde las 11:45 am y las 2:45 pm. en días para los cuales la UPTC presentó desarrollos académicos normales para sus estudiantes. La observación directa sobre el SDC permitió determinar que, había franjas horarias con superior grado de afluencia de estudiantes dirigiéndose al lugar físico donde está ubicado el restaurante y el flujo de personas variaba con las necesidades estudiantiles; sin embargo, de forma general se apreciaba una relativa uniformidad en la operación del SDC, aspectos que también coinciden con lo mencionado en Hillier y Lieberman (2010).

En este punto, el grupo estudiantil de colaboradores, al realizar la aritmética respectiva pudo deducir que, el restaurante presentaba una eficiencia del 90.64% y al estar operando por tres horas aproximadamente en la franja del medio día, potencialmente atendería a 1587 personas en esa franja, además, serían 7935 a la semana y probablemente se pronosticarían unos 15870 al agregar la atención del estudiantado perteneciente a la jornada nocturna. Estos resultados presentan una considerable concordancia con los hallazgos reportados por Vergara (2019) y Bonfante et al. (2020) para SDC con ciertas semejanzas, pero contrastan con los de Hess & Grbčić (2019) y Kazakov, Lempert & Zharkov (2024). En cuanto a los valores de las medidas de eficiencia obtenidas, éstos resultados fueron levemente inferiores a los reportados por Estrada et al. (2019) quienes obtuvieron niveles relativamente superiores para el caso de un local de comidas rápidas y a los resultados presentados por Piratelli et al. (2015) cuyo modelaje se hizo a través de distribuciones Weibull.

Por otra parte, la estrategia pedagógica implementada en este trabajo ha incluido procesos y procedimientos que han despertado el interés por la investigación formativa en el grupo de estudiantes colaboradores, quienes han apropiado tanto elementos teóricos como prácticos para modelar SDC a partir de la data proveniente de un contexto real donde frecuentemente acuden para almorzar; frente a esta experiencia han manifestado estar satisfechos por aprehender que los fenómenos de tipo aleatorio son susceptibles de ser representados analíticamente a través de modelos no deterministas específicos, en el sentido expuesto por Gabalán y Vázquez (2021), por ejemplo MDPP y exponenciales solo por indicar algunos. Semejantes efectos se han logrado al aplicar las estrategias expuestas por Gonçalves et al. (2020), Chamoso y González (2020) o Pérez y Ricardo (2021).

Conclusiones

Para modelizar de forma analítica el SDC referido al restaurante ubicado en la UPTC-Tunja, son adecuados los MDPP y exponenciales. Por lo tanto, se concluye que, los mencionados modelos de corte probabilístico son pertinentes para describir tal sistema; asimismo, se ha establecido que éstos forman parte de la estrategia pedagógica implementada; sin embargo, no son los únicos y podrían plantearse otros de forma alternativa.

Con base en los hallazgos, también se concluye que, el modelaje del sistema de colas del restaurante incluyó componentes aleatorios representados con $M/S/1$, el sistema se encontraba funcionando de forma estable, las medidas de eficiencia evidenciaron que, la tasa media de arribos está entorno a los 80 estudiantes por cada periodo de diez minutos, la tasa media de servicio fue de 88 usuarios para el mismo periodo temporal, el tiempo de espera de los usuarios en la LDE puede considerarse pequeño, el tiempo de servicio fue adecuado, el SDC resultó bastante eficiente, presenta un alto porcentaje (90.64%) de usos por parte del estudiantado; no obstante, las medidas de eficiencias reflejan que aún puede optimizarse.

En este contexto, se recomienda implementar esta estrategia pedagógica para modelar otros sistemas en contextos reales semejantes. Además, este trabajo investigativo también posibilita proyectar otras investigaciones futuras focalizadas en: i) modelizar otras LDE usando modelos no deterministas alternativos, ii) incrementar el uso de estrategias centradas en el modelamiento de fenómenos que se caractericen por presentar incertidumbre, iii) incluir grupos más numerosos de estudiantes interesados en incursionar en procesos semejantes de investigación formativa, entre otros.

Referencias

- Arikatla, J. L., Swamy, G. N., y Prasad, M. N. (2021). Dynamic Coordinative Estimation Enhancement in Cognitive Radio Network. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 1-12.
- Arroyo, I., Bravo, L., Linas, H., y Muñoz, F. (2014). Poisson and Gamma distributions: a discrete and continuous relation. *Prospective*, 12(1), 99-107.

- Bonfante, S., Carrillo, J., Gutiérrez, E., Silva, R., & Pulido, A. (2020). Análisis de líneas de espera en el proceso de entrega de pedidos de un restaurante en la ciudad de Barranquilla. *Investigación y desarrollo en TIC*, 11(2), 49-62.
- Brugno, A., Dudin, A. N., Manzo, R. (2018). Analysis of a strategy of adaptive group admission of customers to single server retrial system. *J Ambient Intell Human Comput*, 9(1),123–135
- Buchholz, P., y Kriege, J. (2017). Fitting correlated arrival and service times and related queueing performance. *Queueing Systems*, 85(3), 337-359.
- Burbano, V., Valdivieso, M., y Burbano, A. (2021). Estrategia didáctica para aprender modelaje probabilístico en sistemas de colas. *Revista boletín Redipe*, 10(6), 441-456.
- D'apice, C., D'arienzo, M., Dudin, A., y Manzo, R. (2023). Admission control in priority queueing system with servers reservation and temporal blocking admission of low priority users. *IEEE Access*, 11, 44425-44443.
- Estrada, R., Pin, M., Solórzano, A., y Cevallos, L. (2019). Aplicación de un modelo híbrido de teoría de colas para la optimización en el servicio de atención al cliente en un local de comidas rápidas. *Ecuadorian Science Journal*, 3, 15-22.
- Flores- Tapia, C., y Flores-Cevallos, K. (2021). Aplicación de modelos de simulación a líneas de espera, riesgos e inventarios. *Ingeniería Industrial*, 42(3), 54-66.
- Gabalán, J., & Vásquez, F. (2021). Una propuesta metodológica didáctico-constructivista para fomentar el aprendizaje de la modelación estadística a nivel universitario. *Actualidades pedagógicas*, 76(1), 61-79.
- Gonçalves, W., Curto, R. S., Maciel, E. R., y Gambarine, R. M. (2020). Use of queue theory model in public management: the school geared towards the student. *Brazilian Journal of Production Engineering*, 6(1), 99-110.
- Gómez, J., Luna, W., y Ruíz (2018). Análisis y simulación de tiempos de espera aplicando teoría de colas en la terminal de transportes de Popayán Cauca Colombia. *Publicaciones e Investigación*, 12(2), 35-43.
- Harris, C., y Gross, D. (2014). *Fundamental of queueing theory*. New York: John Wiley and Sons
- Hess, S., & Grbčić, A. (2019). The multiphase queueing system of the Rijeka airport. *Pomorstvo*, 33(2), 205-209.

- Hillier, F., y Lieberman, G. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. México McGraw_Hill.
- Horváth, G. (2012). Efficient analysis of the queue length moments of the MMAP/MAP/1 preemptive priority queue. *Performance Evaluation*, 69(12), 684-700.
- Huincahue, J., Borromeo, R., y Mena, J. (2018). El conocimiento de la modelización matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 99-115.
- Inche, J., Andía, Y., Huamanchumo, H., López, M., Vizcarra, J., & Flores, G. (2003). Paradigma cuantitativo: un enfoque empírico y analítico. *Industrial data*, 6(1), 23-37.
- Juárez, J. A., Chamoso, J. M., y González, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 38(3), 161-178.
- Kazakov, A., Lempert, A., & Zharkov, M. (2024). Modeling of a Coal Transshipment Complex Based on a Queuing Network. *Applied Sciences*, 14(16), 6970.
- Klimenok, V., Dudin, A., y Vishnevsky, V. (2020). Priority multi-server queueing system with heterogeneous customers. *Mathematics*, 8(9), 1501.
- Lazo, L. S., & Vivanco, L. P. (2023). Modelo para la mejora del servicio de atención al cliente mediante la teoría de colas: caso de estudio de una agencia bancaria. *Interfases*, 17, 146-168.
- Lee, S., Dudin, A., Dudina, O., & Kim, C. (2024). Analysis of a priority queueing system with the enhanced fairness of servers scheduling. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 15(1), 465-477.
- Pulido, A., Verdaza, A., Martínez, B., Pérez., Castellanos, D., Sarmiento, J., y Pulido, P. (2022). Un modelo de simulación de eventos discretos para el análisis de un sistema de línea de espera en servicios portuarios: Un caso de estudio. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 30(1), 145-156.
- Lizárraga, R. E., Gómez, P. J., y Paredes, L. J. (2017). Teoría de colas para minimizar tiempos de espera en una empresa financiera. *INGnosis*, 3(1), 218-232.
- Munevar, S., Burbano, V. & Valdivieso, M. (2021). Construcción de escenarios de paz: estrategia pedagógica para paliar la agresión estudiantil. *Revista Saber, Ciencia y Libertad*, 16(2), 292 – 306. <https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2021v16n2.7239>

- Mustafa, S. (2020). A comparison of single server and multiple server queuing models in different departments of hospitals. *Punjab University Journal of Mathematics*, 47(1), 73-80
- Özdemir, E. & Üzel, D. (2012). Student opinions on teaching based on mathematical modelling. *Procedia - Soc. Behav. Sci.*, 55, 1207-1214.
- Parra, I., y Gallego, J. A. (1999). Modelos de mercado: una aplicación de la teoría de colas. *Estudios de Economía Aplicada*, 11(1), 121-142
- Pérez, R., Márquez, G. A., y Rosales, F. A. (2019). Técnicas de investigación operativa aplicadas al trabajo por cuenta propia. *Ciencias Holguín*, 25(4), 49-61.
- Pérez, W., y Ricardo, C. (2021). Características de los ambientes de aprendizaje enriquecidos con TIC para la comprensión lectora en el ciclo de la Educación Básica. *Revista Saber, Ciencia y Libertad*, 16(1), 278 – 300. <https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2021v16n1.7533>
- Piratelli, C., Achcar, J., y Sandrim, R. (2015). Análise de tempos entre chegadas de lotes em uma indústria alimentícia. *Ingeniare, Revista Chilena de ingeniería*, 23(4), 569-578.
- Rivera, L., Gonzalez, R., Vazquez, M., Calderon, C., Limardo, M., Rivera, M., y Sanchez, N. (2024). Wait times for dermatology Appointments in Puerto Rico. *Journal of the American Academy of Dermatology*, 91(3), AB360.
- Rovetto, C., Cruz, E., Nuñez, I., Santana, K., Smolarz, A., Rangel, J., & Cano, E. E. (2023). Minimizing intersection waiting time: Proposal of a queue network model using Kendall's notation in Panama city. *Applied Sciences*, 13(18), 10030.
- Ross, Sh. (1999). *Simulación*. United States of America: Prentice Hall.
- Sánchez, Y., Sánchez, V., y Gómez, C. (2024). Modelos para la gestión de flujos de pacientes, validado en un servicio de cirugía general. *Revista Cubana de Medicina Militar*, 53(1): e024022338
- Taha, H. (2011). *Operations Research*. New York: Adison Wesly.
- Trejo, H. G. P., Lara, E. A. G., & Flores, J. E. L. (2022). Estimación máxima verosimilitud de la probabilidad de ruina en el modelo de riesgo clásico con reclamaciones exponenciales. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 29(2), 239-260.
- Vargas, J., Causado, J., y Mercado, H. (2020). Estimadores bayesianos de distribuciones Weibull aplicados a un modelo de línea de espera G/G/S. *Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa*, 30, 142-162.

Vergara, A. (2019). Aplicaciones de la teoría de líneas de espera en el servicio de biblioteca de una organización educativa en Cartagena- Colombia. *Saber, Ciencia y Libertad*, 14(1), 171-178.

Villa, J., y Alencar, E. S. D. (2019). Un panorama de investigaciones sobre Modelación Matemática: Colombia y Brasil. *Revista de Educação Matemática*, 16(21), 18-37.