Propuesta Alternativa para la presentación del Teorema Fundamental del Cálculo basado en las versiones históricas de Newton y Leibniz

Weimar Muñoz Villate
wmunozv@correo.udistrital.edu.co
Estudiante doctoral Universidad Distrital Francisco José de Caldas (D.I.E).

RESUMEN

Este escrito tiene como fin exponer algunas consideraciones sobre las demostraciones[1] originales del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) de Newton y Leibniz desarrolladas durante el Siglo XVII.

>>

[1] *No son demostraciones en el sentido del análisis matemático moderno. De hecho, Newton lo planteó como un ``Problema'' y dio su solución. Uno de sus intereses era el manejo de velocidades y distancias. En Leibniz aparece el TFC casi de manera obvia, al generalizar la idea de que la resta y la suma son operaciones inversas. Ninguno lo enunció como Teorema y sus resultados fueron escritos utilizando la geometría euclidiana.*

El punto de vista de estas demostraciones se guía bajo los contextos dinámico y geométrico, que podrían servir como estructuras para presentaciones alternativas del TFC en cualquier curso de cálculo integral.

PALABRAS CLAVES

Teorema Fundamental del Cálculo, Contexto Histórico, Dinámico y Geométrico.

INTRODUCCIÓN

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es comúnmente atribuido a Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos otros matemáticos cimentaron, trabajaron y refinaron los conceptos necesarios para lo que en la actualidad se conoce como el TFC. Por citar solo algunos nombres (desde el S. XVI y hasta el S. XVIII) se encuentran: Bonaventura Cavalieri, Pierre de Fermat, John Wallis, Isaac Barrow, Hendrick van Heuraet, James Gregory, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, y la lista continúa...

Este escrito brinda una forma alternativa de presentar el TFC, y su demostración, para cursos de formación de profesores de matemáticas, o para alumnos de ingeniería (donde aún se preserve el estudio de las demostraciones de los teoremas), a partir de los resultados de Newton (en 1665) y de Leibniz (en 1693).

En la mayoría de textos (salvo pequeños cambios), se suele enunciar el TFC de la siguiente manera (e.g. Stewart, 2015; p. 326):

Teorema Fundamental del Cálculo:

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$

(1) Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$

(2) $\int_a^b f(x)dx=F(b) - F(a)$ donde F es una antiderivada de f, es decir, $F'(x) = f(x)$

Además, por citar solo algunos de las diferentes formas de presentar el TFC se tiene, por ejemplo, el texto de Stewart (2015) que comienza por el Cálculo de Áreas, luego muestra las Integrales Definidas (con sus propiedades) y finalmente, el TFC. Para la demostración de (1) aplica la definición de derivada, el Teorema del Valor Extremo de las integrales definidas y posteriormente el Teorema del Emparedado.

Por el contrario, el texto de Thomas (2006) inicia con la Estimación de Sumas Finitas, a continuación, aborda el uso de la Notación Sigma y Límite de Sumas Finitas. Posteriormente, desarrolla las Integrales Definidas (propiedades junto con el valor medio de una función) para concluir con el TFC. Para la demostración de (1), Thomas utiliza la definición de la derivada y el Teorema del Valor Medio para Integrales Definidas.

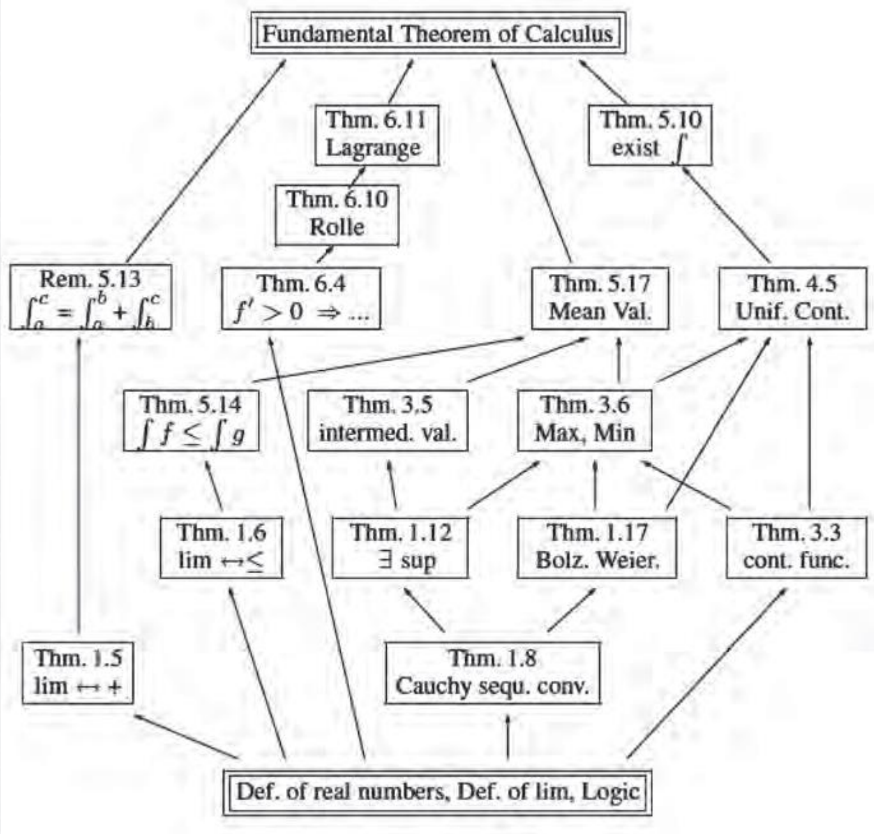
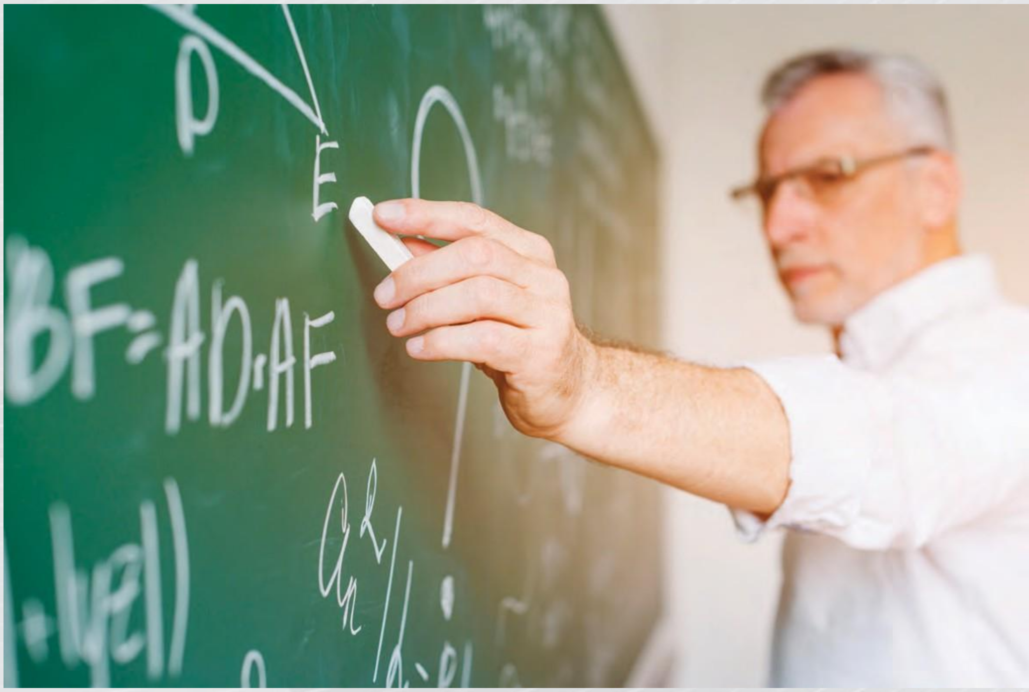


Figura 2. Árbol genealógico del TFC (Hairer & Wanner, 2008, p. 242).

Ninguna de estas dos formas de presentar el TFC se asemeja a las realizadas por Newton y Leibniz, y no solamente por la notación utilizada, las demostraciones realizadas tienen contextos completamente diferentes.



Más aún, ninguno de los múltiples caminos que nos ilustran Hairer and Wanner (2008), en la página 242, en su árbol genealógico del TFC (Figura anterior) contiene los puntos de vista de Newton y Leibniz. Este árbol muestra, eso sí, la complejidad y la variedad de algunos conceptos matemáticos que son necesarios para el TFC.

El propósito de dirigir la atención hacia los puntos de vista originales de Newton y Leibniz es tener una alternativa diferente de presentar el TFC y sus demostraciones (con sus componentes de dinámica y geometría). Podría ser implementado en clases dirigidas a futuros profesores de matemáticas o ingeniería. Se puede manejar la notación moderna, sin perder de vista las ideas originales planteadas por ambos. Se inicia con la presentación de Newton, y posteriormente con el punto de vista de Leibniz, sin embargo, como bien lo señala Bressoud (2011): *"Incluso más que reconocer la naturaleza inversa de la integración y la diferenciación, la genialidad de Newton y Leibniz yace en su habilidad para moverse fácilmente entre las ejemplificaciones dinámica y geométrica del cálculo. Leibniz reconoce la integración como como una acumulación o suma de áreas infinitesimales. Newton usa los modelos geométricos para considerar relaciones de aceleración, velocidad y distancia."*

TFC PARA NEWTON

La integración en Newton, puede ser vista de manera dinámica como una acumulación de una cantidad descrita por sus tasas de cambio (fluxiones). La primera parte del TFC (1) asegura que la razón de cambio del área (o fluente) está dada por la ordenada de la curva que la delimita. Isaac Newton desarrolló esta idea en el manuscrito "The October 1666 Tract on Fluxions".

No obstante, como advierte Guicciardini, (2009) en la página 183, "él descubrió este teorema en 1665... Su razonamiento... se refiere a dos curvas particulares $z=x^3/a$ y $y=3x^2/a$. Sin embargo, es completamente general…"

Newton además dijo "llamando fluxiones a las velocidades de los movimientos o de los aumentos y de fluentes a las cantidades generadas, esclarecí, poco a poco (en 1665 y 1666) el método de fluxiones", (Santos, 2012, pág. 114). La relación inversa entre el problema de áreas y el problema de las tangentes, aparece también en 1669 en De Analysi, y puede leerse en Guicciardini, (2009), página 185.

A continuación, se presentará la versión del TFC descrita en el Problema 5 (traducción aproximada al castellano desde el enunciado original), que correspondería a (1):

Problema 5: *Para hallar la naturaleza de la curva cuya área está expresada por una ecuación dada. Esto es, la naturaleza del área está dada para hallar la naturaleza de la curva cuya área está dada.*

Este problema, extraído de Newton project (2011), podría traducirse en nuestros términos

>>

>>

como: dada un área representada por una ecuación, encuentre la curva que la delimita. Newton utilizó la siguiente gráfica (Figura del Problema 5) en su solución. Él observó que el movimiento por el cual (el área de la región) y se incrementa es $bc = q$.

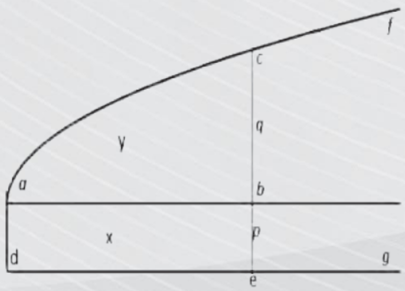


Figura utilizada por Newton en el Problema 5, en The tract of fluxions -1666

Figura 3. Reconstrucción de la demostración de Newton del TFC.

Newton realizó la construcción geométrica de esta figura, de la siguiente manera:

(*a*) $de \parallel ab$ y $ad \parallel be \perp$
Tomó además ab ad

(b) $ab = x$ (como medida)
y $abc = y$ (como área)

(*c*) Declaró $be = 1$
(y por tanto $ad = 1$),
Luego el área $\square abde = x \cdot 1 = x$

(*d*) ad es fija y cbe se va desplazando hasta generar el rectángulo $\square abde$ y la supreficie abc

La conclusión inmediata de esta construcción, es que la velocidad con las cuales se incrementan el área x está dada por be, mientras que "el movimiento por el que y se incrementa es *bc*'', es decir, la razón de cambio del área y es $bc=q$.

Pero hay más, Newton ofrece la forma algorítmica para hallar la curva que delimita un área dada, esta es $-Xy/Xx = q = bc$ que es similar a la fórmula que se utiliza actualmente para la derivación implícita.

Ejemplo: A continuación, se traduce el primer ejemplo que realizó Isaac Newton para el Problema 5:

Si $2x/3\surd rx = y$ o $-4rx^3+9yy=0$
Entonces es
$12rxx/18y = q = \surd rx$ o $rx=qq$
y por lo tanto abc es la parábola cuya área abc es $2x/3\surd rx = 2qx/3$, Tomado de Newton Project, 2011.

¿Cómo hacia Newton para hallar esta curva de ordenada q? En la Proposición 7, de Tract on Fluxions tenía lo que para nosotros es una tabla de integrales, donde relacionaba fluentes (áreas) y la curva que la delimita. En la notación actual este ejemplo se podría escribir como:

La ecuación $y=2x/3\ \surd rx$ describe un área. Ésta ecuación es equivalente a $-4rx^3+9y^2=0$.

Así, aplicando la derivación implícita de la manera indicada por Newton, se tiene:

$$-Xx/Xy=-(-12rx^2)/18y=12rx^2/18y$$

Por lo tanto, $\surd rx=q$. Esto es, el área dada puede reescribirse como $y=(2/3)\ r^{(1/2)}\ x^{(3/2)}$, y además:

$$12rx^2/18y=\surd rx=d/dx[\ {}^{x}\!\int_a \surd rtdt$$

TFC PARA LEIBNIZ

La idea que desarrolló Gottfried Leibniz para crear su cálculo fue que la suma y la resta son operaciones inversas[2] lo que conlleva a pensar que el TFC es obvio, (Katz, 2008). Leibniz buscaba hallar el área bajo una curva y para eso, construyó una curva auxiliar para la cual la pendiente es proporcional a la altura de la curva original (Bressoud, 2011a). Su TFC apareció en 1693 en el Acta Eruditorum, una revista mensual que él mismo ayudó a fundar, (Struik, 1969).

En la siguiente figura (figura 2 en Acta Eruditorum), los puntos entre paréntesis (H), (F), (C) y (B) son infinitesimales. La curva AH(H) es la figura a la que se le quiere hallar el área, y la curva C(C) es la curva cuya derivada en C es precisamente FH. Se debe tener en cuenta que Leibniz alcanzó su resultado comparando los triángulos TBC (triángulo característico) y CE(C) (el triángulo diferencial) de esta figura, de la siguiente manera:

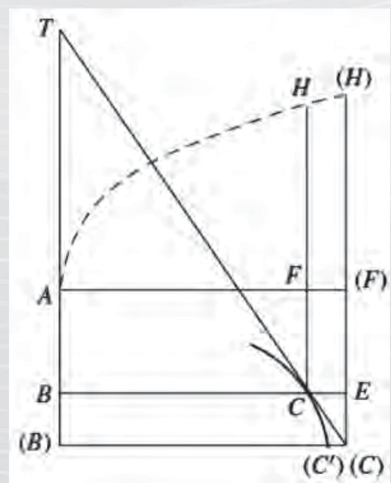


Figura tomada de (Bressoud, 2011, p 101)

Figura 4. Reconstrucción de la demostración de Leibniz del TFC.

(*a*) Primero denominó a $AF=y$, $FH=z$, $BT=t$ y $FC=x$

(b) Definió una distancia constante a, tal que $TB{:}BC = FH{:}a$ (El uso de estos parámetros era usual en la época (Bressoud;2011) y (López; J. 2011))

[2] *Esta presentación puede leerse en (Katz, 1993) página 565.*

(c) Como $FC = x$ y $AF=y$, entonces $dy=F(F)=CE$ y $dx=E(C)$

(d) De la relación de los triángulos característico y diferencial, se tiene que $TB:BC=E(C):EC$, luego $TB:BC=dx:dy$

(e) Concluyó que, $dx:dy=z:a$, es decir, $adx=zdy$. Este último producto es el área de la región $F(F)(H)H$ y adx es el área de un rectángulo de altura $(E)C=dx$ y ancho el parámetro a

(f) Al sumar a ambos lados de esta igualdad, se obtiene que $\int adx=ax$ es el área de un rectángulo de altura $FC=x$ y ancho a, mientras que $\int zdy$ es el área de la región $AFHA$. Lo que muestra que $C(C)$ es la antiderivada (quadratrix como se denominaba) de la curva $AH(H)$

Leibniz dio así una forma para encontrar el área bajo una curva. Al igual que Newton, propone un resultado y da el algoritmo para su uso. En efecto, utilizando nuestra notación moderna y usando el resultado de Leibniz, se puede concluir (2):

Si se quiere hallar el área bajo una curva con ordenada y, lo que se necesita es encontrar una curva z tal que $z=\int ydx$. Es decir, si $y=f(x)$, se debe buscar $z=F(x)$ (su antiderivada) que satisfaga:

$dz/dx=y/1 \rightarrow dz=ydx$

De manera particular, $\int_a^x dz=\int_a^x ydx$, o análogamente, $F(x)=\int_a^x dz=\int_a^x ydx=\int_a^x f(x)dx$.

En estos términos, $F(a)=0$, entonces $F(x)-F(a)=\int_a^x f(x)dx$.

Se acaba de demostrar la siguiente versión del TFC (2), (Lopez, 2011):

Teorema Sea $f:[a,b]\rightarrow R$ una función continua y suponga que $F:[a,b]\rightarrow R$ es una quadratrix para f, es decir F es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $F'(x)=f(x)$ para todo x en (a,b). Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Leibniz llega al TFC empleando el triángulo diferencial y su relación con el triángulo característico. Esta relación también fue usada en su Teorema de Transmutación (Katz, 2008). Sin embargo, el uso del triángulo diferencial no fue exclusivo de él. Isaac Barrow en su versión del TFC, ya lo había empleado. ¿Por qué entonces no se dice que Barrow fue el creador del TFC? Según D.T Whiteside puede ser por la posibilidad de ofrecer un algoritmo (como sí lo hicieron Newton y Leibniz) para hallar la solución de un problema de áreas, más que mostrar, únicamente, que la derivación e integración son procesos opuestos (Bressoud, 2011b, pag. 103). Puede verse las similitudes entre la demostración de Leibniz y Barrow en Lopez, J., (2011). Para tener una mejor comprensión del teorema de transmutación puede referenciarse a la expuesta, de manera muy sencilla, en Mena, R. (n.d.).

CONCLUSIÓN

Como aporte a la enseñanza y aprendizaje del TFC, se podría presentar el TFC teniendo en cuenta el momento histórico de Newton y Leibniz en el S. XV I, de la siguiente manera: Usando la notación moderna, (1) se puede presentar utilizando el enfoque dinámico de Newton, y para (2) se puede realizar siguiendo el punto de vista geométrico de Leibniz. Se puede complementar este estudio con el Teorema de Transmutación de Leibniz como punto de partida, realizando todas las gráficas en un software matemático, por ejemplo, en Geogebra.

BIBLIOGRAFÍA

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. American Mathematical Monthly, 118(2), 99–115. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.02.099

Cajori, F. (1923). The History of Notations of the Calculus. The Annals of Mathematics,.

Guicciardini, N. (2009). Isaac Newton on mathematical certainty and method. https://doi.org/10.1007/s10086-013-1369-8

Hairer, E., & Wanner, G. (2008). Analysis by its History. In Undergraduate Texts in Mathematics. New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-92712-1

Katz, V. (2008). A History of Mathematics. Pearson.

Kline, M. (1972). Mathematical thought. From ancient to modern times. Vol 3. New York: Oxfor University Press.

Lopez, J. (2011). REFLEXIONS ON LEIBNIZ' PROOF OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS. Research Gate. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4804.2405

Mena, R. (n.d.). The Fundamental Theorem of Calculus. Retrieved from http://web.csulb.edu/~rmena/410/Section8.pdf

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos , representaciones semióticas y sentidos, 1, 151–165. Stewart, J. (2015). Calculus. Boston: Cengage Learning.

Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. (2009). Thomas' Calculus. Math.Utoledo.Edu. https://doi.org/10.1073/pnas.0703993104

Thomas, J. (2006). Calculo de una variable.

Thompson, P. (1994). Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental

Theorem of Calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 131. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4236/ojo.2014.48035

UNIVERSIDAD LIBRE
Vigilada Mineducación

CAMINANDO EN LA EXCELENCIA