El arte y la historia de la construcción de la geometría proyectiva

Art and History of the Construction of Projective Geometry

Magaly Corredor[1]
Carlos Arturo Londoño-Ramos[2]

Resumen

El presente estudio muestra una secuencia en el devenir de la geometría proyectiva. Se presenta la historia de la perspectiva desde su fundamentación teórica, su desarrollo y su origen a partir del arte. Así, la pintura y la geometría proyectiva interaccionan y se condicionan, en sucesivos períodos se desenvuelven y presentan divergencias, hasta culminar con la independencia total de la geometría con respecto a las necesidades del arte; en este proceso se analizan las características de cada periodo. La noción de perspectiva se basa en la de proyección y esta a su vez es un caso particular de la operación de transformación en el estudio de las propiedades invariantes hasta culminar en los estudios topológicos. Esta investigación, basada en el enfoque sociogenético de la geometría, tiene consecuencias y aplicaciones en la epistemología y en la pedagogía de esta rama de la matemática. La exploración del surgimiento de la ciencia en conjunción con el arte aporta a la ampliación de una visión multidisciplinaria de los saberes.

Palabras clave
Perspectiva lineal; transformaciones geométricas; geometría proyectiva; historia de la geometría.

Abstract

The present study shows a sequence in the evolution of projective geometry. The history of perspective is presented from its theoretical foundation, its development and its origin from art. Painting and projective geometry interact and are conditioned to each other: in successive periods they develop and present divergences until they end up with the total independence of geometry with respect to the needs of art; in this process, the characteristics of each period are analyzed. The notion of perspective is based on projection and in this particular case, the study of transformation of invariant properties culminate in topological studies. This research based on the socio-genetic approach to geometry has consequences and applications in epistemology and pedagogy of this mathematics branch. The exploration of the rise of science in conjunction with art contributes to the expansion of a multidisciplinary vision of knowledge.

Keywords
Linear perspective; geometric transformations; projective geometry; history of geometry.

Fecha de recepción: 28 de enero de 2019
Fecha de evaluación: 20 de marzo de 2019
Fecha de aceptación: 2 de mayo de 2019

1 Profesora Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Escuela de Matemáticas y Estadística. Grupo de investigación Pirámide. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6209-495x
2 Profesor Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Escuela de Filosofía y Humanidades. Grupo de investigación HISULA.

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

Introducción

En la época del Renacimiento se encuentra la primera relación estrecha entre geometría y arte pictórico, éstos campos del saber convergen allí en torno a la noción de perspectiva lineal como parte conceptual de la primera, y la necesidad de plasmar la realidad visible en la segunda. El origen y desarrollo histórico de la perspectiva evoluciona hasta generar una nueva rama de las matemáticas. Este proceso es aleccionador y fecundo para la didáctica, la epistemología e historia de esta ciencia: permite determinar las nociones primigenias de la topología y sus nexos con la geometría, como el área que expande el dominio del espacio a ámbitos generales y abstractos.

Hay una secuencia histórica en el devenir de la Geometría Proyectiva, desde su origen hasta constituirse en otra geometría aún más general que la euclidiana (Corredor, 2012b). Para mostrar esta secuencia se analizan las características principales de cada periodo, las cuales se derivan de la mayor o menor medida en que la ciencia del espacio dependió del arte. De esta forma se presenta la historia de la perspectiva desde su fundamentación teórica, su desarrollo e influencia en el arte, a través de épocas que culminaron con la independencia total de la geometría proyectiva de las necesidades del arte.

Las preguntas de investigación que encauzaron el estudio fueron: ¿Cómo fue el origen de la perspectiva lineal? ¿Cuáles son los periodos de su evolución histórica? ¿Qué características permiten delimitar cada periodo? ¿Cómo se llegó a la geometría proyectiva? ¿Cuál es el papel de la perspectiva como transformación geométrica en este desarrollo? En la respuesta a estos interrogantes, se destaca el papel que jugó la operación de transformación en este desarrollo, ya que esta noción es el hilo conductor e impulsador que determina esta cronología: transformar figuras es el fundamento de la geometría.

Las operaciones de transformación no se estudiaron desde la óptica matemática, por lo menos en su inicio, pues esta transformación se produjo por la necesidad de los artistas de representar la realidad tridimensional en un plano. Las inquietudes iniciales fueron acrecentándose a medida que se fue ubicando el tema más en el campo matemático que en el artístico, en la aplicación a la ingeniería y en el dibujo técnico. La separación de los campos de acción de la proyección artística y la perspectiva matemática contribuyó a encontrar un terreno fértil que condujo finalmente a definir una nueva geometría.

La noción de perspectiva se basa en el concepto de proyección, y esta, a su vez, es un caso particular de la operación de transformación. El estudio de las propiedades invariantes bajo el efecto de las transformaciones originó la geometría proyectiva y, posteriormente, la topología[3].

El empleo de la perspectiva lineal en la pintura es el mejor ejemplo de la forma como la geometría ha influido sobre el arte. El Renacimiento es una época especial por cuanto en ella los artistas trabajaron su arte en la medida en que planearon creativamente la geometría. La simultaneidad de lo científico con lo artístico fue notable porque la geometría era una de las ciencias que mejor dominaban a nivel práctico. Estos artistas comprendieron la ciencia matemática, manejaron sus reglas básicas y las emplearon para la representación del mundo tridimensional sobre una superficie: fueron arquitectos, ingenieros y, algunos, los mejores matemáticos del S. XV (Kline, 1972). El dominio de la perspectiva logrado en ese ambiente artístico y científico del Renacimiento impulsó la técnica pictórica y, en matemáticas, un nuevo campo de saberes.

3 La evolución del concepto comenzó estrechamente ligada al arte, sin embargo, el ámbito en que se concibe este artículo no es artístico, por tanto, no se hará mención de obras y pintores, no desde el punto de vista de lo artístico ni de su técnica ni estructura, sino sobre cómo y hasta qué punto se emplearon técnicas basadas en la geometría para su elaboración, tampoco es un escrito de matemáticas y por ello se han suprimido las demostraciones y deducciones en el lenguaje propiamente técnico, para guardar la línea del escrito.

Evolución histórica de la geometría proyectiva

Las primeras fases de esta historia de la geometría proyectiva han sido escritas y estudiadas en varias partes, específicamente de sus comienzos en el arte pictórico renacentista, pero se hace mucho más escasa a medida que se centra en la geometría proyectiva y la topología. El arte dirigió en gran medida la génesis de la Geometría Proyectiva, no sólo porque de su seno nació la idea, sino porque determinó el avance de los primeros progresos. Luego, la técnica geométrica dio lugar a la formalización y conceptualización, que permitió consolidar un estilo de pensamiento nuevo e independiente en matemáticas y, consecuentemente, su independencia del arte. En esta historia se proponen cuatro períodos, siendo esta secuencia el principal hallazgo de la investigación. Los períodos muestran el progreso de la perspectiva desde su descubrimiento hasta su matematización por parte de geómetras connotados:

- Invención y cimentación de la teoría: de Brunellleschi a Da Vinci.
- Adopción de la teoría matemática de la perspectiva por los artistas del norte de Europa.
- Matematización en Italia hacia 1600.
- Formalización de la Geometría Proyectiva y desarrollo como rama de la matemática.

La clave de la representación de la realidad tridimensional sobre una base bidimensional está en las nociones de proyección y de sección. Lo visible de una escena depende de la posición del observador: si se percibe con los dos ojos o uno solo, o si se está en movimiento o en reposo. Los pintores del *quatrocentto* simplificaron la pintura considerando que se percibe con un solo ojo y en posición fija; cada rayo de luz que se supone originado desde un punto de la escena va hacia el ojo del observador; la colección de rayos de luz es la proyección, y asumieron que la superficie es una pantalla transparente interpuesta entre el ojo y la escena, la colección de puntos de corte de la proyección con la superficie es una sección. Estos rudimentos fueron descubiertos en Florencia a comienzos del siglo XV y por más de cuatrocientos años fue el procedimiento normal empleado para provocar la sensación de que las formas disminuyen de tamaño a medida que se alejan.

Primer periodo: invención y cimentación de la teoría. Perspectiva geométrica de Brunelleschi a Leonardo

Para que el descubrimiento de la perspectiva se diera, sin duda alguna hubo un germen y unas circunstancias que condicionaron la posibilidad de lograrlo; para el caso que nos ocupa, hubo dos condiciones: la meta de registrar fielmente los fenómenos visuales y, a su vez, que la invención buscada fuera práctica y operatoria y facilitara los niveles de comprensión y habilidad del pintor. Hay factores que dieron a Brunelleschi (1377-1466) la posibilidad de descubrir la perspectiva geométrica.

Los métodos empleados se gestaron desde el *trecentto*, los adoptó junto a fórmulas geométricas de la óptica medieval, unidos a procedimientos arquitectónicos y a su destreza para el desarrollo de una práctica matemática; la combinación de los conocimientos teóricos de la edad media con los conocimientos técnicos “artesanales” constituyó la amalgama conceptual que propició el descubrimiento.

El biógrafo Antonio Manetti (1423-1497) presenció y señaló el descubrimiento geométrico que se hizo en 1413: la reconstrucción diagramática de la perspectiva del Baptisterio y del Palazzo della Signoria en Florencia. Muestran las gráficas que Brunelleschi construyó un agujero en una tabla en el punto que correspondía al corte de la línea de visión del Baptisterio con un eje perpendicular, el observador por detrás de la tabla mira a través del agujero, hacia un espejo que reflejaba la superficie pintada. La obra terminada hacía que el espectador viera el

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

Baptisterio desde la posición del artista (Kemp, 2000).

Pese a estos factores, la perspectiva no se consolidó inmediatamente, fue después de 1420 cuando se tomó en cuenta en el diseño total de las obras. Anterior a este primer período, se conocía una "perspectiva medieval" sin bases geométricas ni ópticas, meramente como medio de organización del plano, mezcla de conocimientos teóricos con técnicas artesanales, que resultaban pertinentes, pero no directa y sistemáticamente aplicadas. Entre los conocimientos y métodos previos más probables que condicionaron el logro del descubrimiento de la perspectiva a manos de Brunelleschi, se pueden nombrar los siguientes:

- Técnicas planimétricas basadas en simples triangulaciones.
- Uso de plantas y alzados a escala basados en la proyección sobre una superficie plana empleando rudimentos de los principios básicos de la perspectiva.
- Uso de instrumentos para medición de ángulos visuales muy similares al astrolabio.
- Fórmulas geométricas de óptica medieval propias de la "perspectiva medieval" conocidos por Brunelleschi.
- Técnicas proyectivas manejadas con mucha dificultad en esa época y que se debían a la cosmología de Ptolomeo.
- Pintar directamente sobre un espejo traía dificultad porque la cabeza y la mano del pintor ocultaban parte importante de la vista.

Masaccio (1401-1428) fue el primero en aplicar a la pintura la perspectiva geométrica; experimentó con sistemas en los que las ortogonales convergían en un punto central único. El análisis de estas ortogonales convergentes lo llevó a adoptar un sistema en el cual las paralelas perpendiculares al plano del cuadro convergen en un punto único. En el fresco, La Trinidad de la Capilla Santa María de Novella, se evidencia el efecto tridimensional mediante el cual el muro adquiere una prolongación hacia el interior; su autor consiguió trabajar la perspectiva junto a este sistema convergente en la arquitectura con que adornó su obra. Este joven pintor dejó ver el influjo de Brunelleschi y contribuyó a explicar de manera más detallada la perspectiva; utilizó una mezcla de técnicas constructivas, y elementos prediseñados que elaboró minuciosamente; pese a esto, se pueden apreciar pequeñas áreas de improvisación que requerían trabajarse matemáticamente. También Brunelleschi dependió de modelos elaborados anticipadamente; cabe admitir la exigencia de la transición desde el modelo empírico al sistema constructivo sintético (Kemp, 2000).

Tres tratadistas de la perspectiva anteriores a Leonardo: León Battista Alberti (1404-1472), Lorenzo Ghiberti (1378-1455) y Piero della Francesca (1415-1492), contribuyeron a:

- Considerar la superficie del cuadro como una intersección de la pirámide visual a una distancia dada, con un centro fijo y definida una posición de luz.
- Construir geométricamente el plano o superficie como requisito previo de la obra. El pintor en general no debía necesariamente ocuparse de los conocimientos matemáticos a profundidad, pero no debía prescindir del uso de la geometría. La proporcionalidad fue pieza fundamental en la composición para crear la escala deslizante de disminuciones en los tamaños creando profundidad en el cuadro.
- Efectuar cálculos para las estructuras arquitectónicas del fondo de la obra y en el suelo de baldosas o pisos ajedrezados, muy característicos de la época, y usar ortogonales convergentes hacia el centro del cuadro.
- Ligar la pintura y la escultura a otras ramas del saber y considerarlas como resultados de involucrar diversas ciencias, esto es, como producto de la armonía entre ciencia medieval y sistema artís-

tico; esto implicaba el conocimiento de los clásicos: Euclides, Vitruvio, Apolonio, etc. Y relacionar la matemática pura con la aplicada siguiendo los principios euclidianos en una forma cada vez más explícita.

- Profundizar en el estudio de las propiedades geométricas y matemáticas de la pirámide visual y propiciar la prolongación de la explicación geométrica albertiana de la visión.

Con Leonardo Da Vinci (1452-1519) se accede a la fase final del periodo. No hay aspecto de la perspectiva en la cual el genio universal no haya hecho aportes; varias veces trató, y de diversas maneras, los problemas relacionados con esta. Como consecuencia de la universalidad de su pensamiento, consideró las ciencias y el arte como componentes de un gran continuo de causas y efectos. Entre los problemas que abordó están: los relacionados con las técnicas de la perspectiva, la geometría y óptica subyacentes, las relaciones entre tamaño y distancia teniendo en cuenta las posiciones relativas del observador, plano y objeto; los recursos e instrumentos ópticos como las propiedades del ojo. Con él se señalan vías de estudio, tales como profundizar en los problemas de la óptica y los procedimientos geométricos en general, los inconvenientes relacionados con la aplicación de la perspectiva, por ejemplo: considerar la perspectiva artificial y la compuesta, en esta última, combinaciones del escorzo del plano mismo y los escorzos en el plano, lo que condujo a usar imágenes anamórficas, es decir, deformaciones ópticas de las figuras como las que se producen en un espejo cóncavo (Zöllner, 2007).

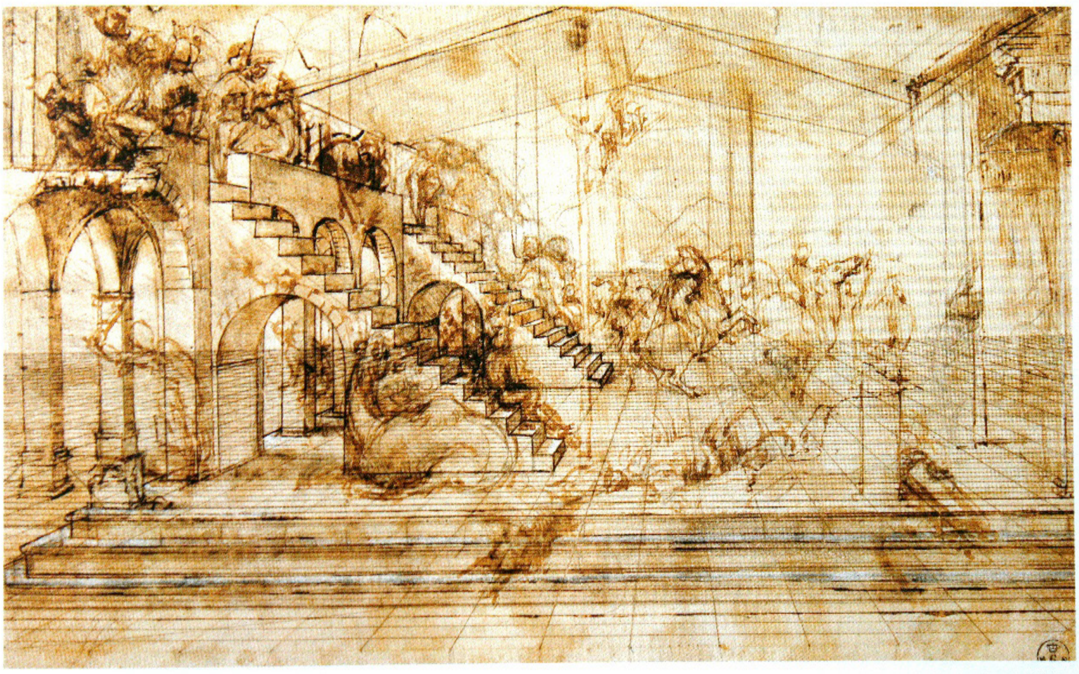

Ilustración 1. Da Vinci, Estudio de perspectiva del fondo de La Adoración de los reyes. 1481. Galería Uffizi. Florencia. Tomada de Zöllner, 2007.

Otra línea de estudio se orientó hacia otras características esenciales de la perspectiva como:

- Reconocer la importancia de la pirámide visual, pero a la vez comenzar a tomar conciencia de las limitaciones y falibilidad del campo de acción de ésta.

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

- Reconocer la relación recíproca entre la ciencia y el arte, ciencia en el arte o arte en la ciencia, o sencillamente, reconocer una ciencia del arte: mostrando contradicciones implícitas en la técnica de la perspectiva empleada.

En este primer periodo la necesidad de los artistas marcó el derrotero a seguir en geometría: la matemática estuvo sujeta al pedido del arte; esta demanda fue favorecida por las capacidades de ellos, quienes además fueron los mejores científicos del Renacimiento, cuyo trabajo intelectual se reflejó directamente en sus obras, siendo la geometría una de las ciencias que dominaban en forma práctica con mayor perfección.

Otros rasgos característicos de este período son: mezclar elementos de construcción prediseñados y elaborados minuciosamente a manera de modelos que se elaboraban con anticipación, con los cuales se plasmaba el cuadro. Esta construcción requería de conocimientos geométricos espaciales y un buen nivel de abstracción. Dejar pequeñas áreas de improvisación en el plano del cuadro, sobre los cuales no se hacían análisis geométricos; es decir, valoración de efectos al tanteo o modificación de la composición de las formas en la superficie de trabajo. Emplear la proporcionalidad y otros conceptos básicos de la geometría euclidiana. Y considerar la visión monofocal en posición fija, empleando la proyección de la luz en estructura piramidal del objeto al ojo (Corredor, 2012).

Segundo Periodo: adopción de la teoría de la perspectiva por los artistas del norte de Europa. Perspectiva lineal de Durero a Galileo.

Después del 1500, la perspectiva como técnica artística tuvo mucho éxito. Al comienzo de la expansión por Europa hubo dificultad para asimilar el componente matemático, pero no hubo país importante donde no se hubiera adoptado, el impacto trascendió a otras disciplinas: el uso de la técnica se reflejó en la historia de las ciencias y también hubo cambios en la perspectiva como ciencia. Esta ciencia germinada en el arte influyó en la evolución intelectual de una manera compleja y creativa, anticipando una nueva visión del espacio finito e infinito de Kepler en astronomía y de Desargues y Descartes en geometría. Emplear esta noción fue el sello para pertenecer al selecto grupo de los artistas intelectuales de excelencia, si para Rafael (1483-1520) fue una cualidad espontánea que manejó sin dificultad alguna, para otros como Durero (1471-1529) fue una revelación que lo llevó a emplearla y a investigar en el tema y en la geometría subyacente.

La importancia de Durero está en el doble rol, tanto artístico como matemático, en sus manos se desarrolló la perspectiva del arte nórdico, influyó tanto en la teoría como en la práctica del arte alemán, de tal forma que Nuremberg, su ciudad natal, se convirtió en uno de los centros culturales más importantes del Renacimiento (Panofsky, 1997). Su teoría geométrica condensada en *Instrucción sobre las medidas con regla y compás de figuras planas y solidas* cuya publicación póstuma es de 1528, configuró la contribución de Durero a la geometría y la perspectiva; su aporte es muy similar al método abreviado, partiendo de formas en planos escorzados (Newman, 1997).

En este período se dio la expansión y trascendencia de la geometría a otros campos y se señaló el origen de una nueva visión del espacio finito e infinito en astronomía. Se pueden mencionar ciertos rasgos característicos del segundo período:

- A la par con la expansión de la geometría crecía en creatividad y fecundidad el empleo de la técnica. Para algunos artistas fue una habilidad de aplicación espontánea como en el caso de Rafael, para otros, fue objeto de investigación y estudio de la geometría subyacente. En general el empleo de la perspectiva daba al artista reconocimiento y autoridad.

Ilustración 2. Rafael, La escuela de Atenas, 1509-1510. Stanze della signatura. El Vaticano. Tomada de Historia Universal del Arte, V6. (2003)

- Un ejemplo acerca de cómo el método y la teoría seguían a manos de los artistas es la figura de Alberto Durero. El artista, por lo general, se afianzó en su doble rol, a la vez de artista y matemático.
- La arquitectura empleada en el fondo de las pinturas o los dibujos para arquitectura, ejercieron relevancia en el desarrollo de la técnica perspectivística, especialmente en Francia, país al cual llegó a través de los artistas italianos, invitados por el rey Francisco I.
- Las obras se colmaron de diversos efectos ilusionistas: fondos arquitectónicos, adornos, figuras, cielos, imitación de mosaicos, tapices y pinturas pintadas dentro de las obras. Así se dio un despliegue de la proyección perspectiva en una amplia gama de efectos. El escorzo con fines decorativos fue la tarea más especializada (Corredor, 2012).

El progreso de la perspectiva condujo al florecimiento de la erudición euclidiana y al interés por la matemática clásica. Los matemáticos humanistas dirigieron su trabajo al descubrimiento, aclaración, traducción y comentarios de textos antiguos, griegos y latinos; el eje de su esfuerzo estuvo en producir textos más claros que los cásicos, por medio de los cuales se apoyara a las demás ciencias. En la convergencia de los estudios entre geometría y arte se destacan:

- Las exigencias del arte propiciaban toda serie de estudios en geometría, y a su vez se condicionaba al interesado para usar la perspectiva al estar comprometido con estudiar geometría euclidiana. Varias escuelas la incluyeron en sus estudios reglamentarios.
- Artistas matemáticos como Danti (1536-1586), Vignola (1507-1573) y los hermanos de Alberti, por ejemplo, profundizaron en el método acompañándolo de un conocimiento matemático esencial.
- Aparecieron libros y tratados con enfoques cada vez más elaborados, exhaustivos y de mayor utilidad (Corredor, 2012).

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

Una característica fundamental de este período es el equilibrio entre el procedimiento práctico y el análisis o estudio matemático inherente. El matemático investigaba las implicaciones prácticas de su ciencia sobre el arte, y el artista por su parte se alimentaba de la geometría para conseguir resultados que satisficieran el rigor del juicio de los expertos.

Comenzaron disputas y polémicas por parte de los artistas partidarios del método y aquellos que no lo veían necesario para expresar sus ideas. Por un lado, la perspectiva era un instrumento necesario para la representación y, por otro, no se requería elevarlo a fundamento del arte. El pintor y su fuerza expresiva no deben depender de la mecánica de las reglas geométricas; tanto tecnicismo alejaba al arte de su verdadero camino; además, para muchos artistas el manejo de la matemática resultaba tedioso y complejo. Inclusive, los matemáticos Giambattista Benedetti (1530-1590) y Federico Commandino (1509-1575), por ejemplo, aceptaron que la perspectiva había suscitado más diferencias que acuerdos en el sector de los artistas (Kemp, 2000).

Se aprecia la tendencia del momento de alejarse progresivamente de las necesidades del artista. La matemática comenzó a dominar en el destino de la perspectiva, sus ramificaciones científicas iban cada vez más allá de lo que los artistas necesitaban y comprendían. Benedetti, Commandino y sus contemporáneos marcan el nacimiento de la geometría proyectiva como disciplina matemática, relacionada aún con la ciencia del pintor, pero cada vez más separada del arte, definiendo unos medios y fines particulares. Pese a este sesgo, el arte y la ciencia matemática pudieron alimentarse mutuamente.

Desde el comienzo, con Brunelleschi se hicieron evidentes las relaciones entre ciencia y arte, la perspectiva se desarrolló paralela al conocimiento de la astronomía y la geografía; la relación entre perspectiva y ciencia fue mucho más directa y recíproca, mientras que la relación con el arte fue absorbida en el contexto de una función diferente. La matemática estuvo en el centro de estos avances, dotándose así misma de nuevas técnicas y proporcionando nuevas herramientas para analizar fenómenos exógenos. No es extraño entonces que la academia florentina de dibujo, fundada por iniciativa de Vasari en 1563, haya incluido la enseñanza de la geometría euclidiana y que luego otras escuelas establecieron las matemáticas como base sólida para la formación de sus alumnos.

Se puede indicar como fase final de este periodo a Galileo (1564-1642) ya que estudió la relación entre visión directa y su representación. Como matemático, físico y astrónomo ayudó a Cigoli Ludovico Cardi (1559-1613), proporcionándole un parangón entre pintura y escultura, los argumentos de Galileo en favor de la pintura resaltan la destreza que suponía crear la ilusión de lo tridimensional mediante la luz y el color sobre el plano (Kemp,2000).

Tercer Periodo: matematización de la perspectiva después de 1600

La evolución de la perspectiva en matemáticas se dirigió hacia la formalización de los conceptos geométricos inmersos en la técnica, por esta razón se distanciaron aún más la perspectiva geométrica de la perspectiva pictórica, sus campos de acción se separaron de tal manera que la primera se dirigió a la teoría y la segunda a la práctica; al mencionar la relación entre Galileo y Cigoli, se aprecia cómo la ciencia y la pintura toman un rumbo diferente. La aplicación de la perspectiva alcanzó en Italia el culmen con el ilusionismo, pero la ciencia en la que se basó era apenas algo más compleja que la del *quattrocento.*

Al definirse estos campos de acción, se separaron paulatinamente también, las profesiones de artista y matemático. El terreno de la teoría cada vez más complejo, riguroso y difícil, alejaba las pretensiones de un profesional ajeno a la matemática. Puede decirse que disminuyó el fenómeno de los artistas-matemáticos.

En Francia la época de oro del tratado de perspectiva, comenzó hacia el año 1630, la lista de autores es enorme y muestra la abundancia de ideas sobre esta proyección. Como era de esperar, esta proliferación de obras trajo consigo una gama de técnicas constructivas igualmente amplia. Varios autores inventaron sistemas propios de practicidad y complejidad singulares, otros emplearon instrumentos de geometría muy lejanos a los intereses artísticos.

Para comenzar este periodo, se ha considerado a Desargues como el principal autor, tanto por ser el perspectivo y geómetra más importante de esta generación, como por ser el más atacado en sus ideas, lo que proporciona una buena visión de los temas claves para el arte y la ciencia. Girard Desargues (1591-1661) fue un ingeniero civil y militar, arquitecto especializado en diseño de escaleras, y sobre todo geómetra de extraordinaria visión espacial (Collette, 1986). Su orientación intelectual expresó dos grandes aspiraciones: construir una geometría de la posición sin tener en cuenta la métrica, basada en técnicas proyectivas y buscar métodos prácticos para quienes trabajaban en campos distintos a la matemática. Así, propuso integrar la teoría y la práctica.

Como autor teórico se dio a conocer en 1636, al publicar un ensayo sobre lectura y escritura musical, que hacía parte de la obra de Mersenne *Harmonie Universelle* y, con su propio texto: *Ejemplo de una de las maneras universales… que conciernen a la práctica de la perspectiva* en doce páginas y una ilustración, ofreció una técnica que proporcionaba un procedimiento autosuficiente para abarcar los posibles casos que se presentaran al artista; ideó una construcción doble en el cuadro, escalas precisas con proyecciones que le facilitaron el manejo del espacio aún mejor que el uso del suelo ajedrezado.

Desargues estudió las propiedades perspectivas de los polígonos inscritos en secciones cónicas, consideró las líneas rectas como curvas que se encuentran en el infinito, las innovaciones técnicas y el uso de puntos de involución lo llevaron a formular su famoso teorema, según el cual, si se dibujan dos triángulos de modo que las líneas que intersectan los pares de vértices correspondientes se encuentran en un punto, entonces los puntos de las intersecciones de los pares de lados correspondientes están en línea recta y viceversa.

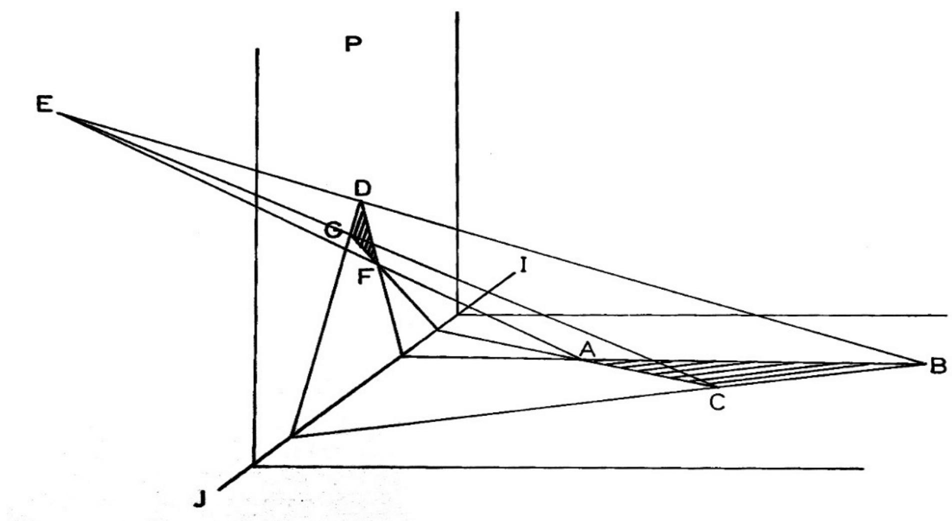

Ilustración 3. El teorema de Desargues. Versión tridimensional. Fuente: Kemp, 2000.

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

La figura 3 ilustra el teorema en versión tridimensional. E es el punto de observación, IJ es la base del plano del cuadro (P) el triángulo ABC se proyecta como DGF. La prueba se logra normalmente en tres dimensiones, sin embargo, en el plano en el que se proyecta un triángulo (Ver figura 3), se pueden apreciar mejor los rasgos esenciales y la técnica perspectivística empleada. El teorema se publicó en el suplemento *Livret de perspective* que él mismo editó en 1643, también apareció en la exposición de Bosse de la *Manière universelle* de Desargues en 1648.

La notación algebraica introducida por Descartes en matemáticas y sus proyectos sobre geometría analítica, abrieron otro panorama amplio y novedoso para explorar, atrajo la mirada de varios matemáticos de la época y restó atención a los hallazgos de Desargues; la teoría sobre geometría proyectiva pasó poco más que desapercibida y, en el arte fue muy poco apreciado su teorema y la *Maniere Universelle*, apenas presentó una desviación excéntrica de la perspectiva práctica y tradicional. Sin embargo, sus métodos sobrevivieron en el trabajo de Blaise Pascal (1623-1662) y un seguidor más tardío, Philippe de La Hire (1640-1718) quien es la personificación de las tradiciones artísticas y de la geometría espacial, se encargó de retomar y divulgar la ciencia proyectiva, la fascinación por esta geometría lo llevó a investigar y renovar los esquemas de Desargues.

Estos tres personajes bien pueden considerarse como los pioneros de la geometría proyectiva como ciencia con un carácter propio y definido; las implicaciones de sus técnicas proyectivas se percibieron propiamente hasta el siglo XIX, gracias a Poncelet y Chasles, quienes prácticamente redescubrieron la geometría de Desargues.

Las discusiones teóricas se acrecentaron en el gremio de matemáticos, disputas sobre el compromiso práctico de la teoría, razón probable para que Girard Desargues abandonara su tarea, él deseaba que la teoría sirviera para apoyar la práctica en otros saberes; sus ejemplares impresos se perdieron y se presentó un lapso en el que fue olvidada la geometría proyectiva, sin embargo, los estudios de otros matemáticos interesados en el arte, como Taylor y Hamilton de Gran Bretaña, sirvieron de base para posteriores aplicaciones en cartografía, técnica militar, arquitectura y en dibujo, apoyadas en la publicación de gran cantidad de material escrito y se favoreció la disponibilidad a los interesados.

Disminuyó considerablemente el uso de las técnicas de perspectiva en la práctica de las bellas artes. La perspectiva lineal dejó de ser fuente de creatividad para la pintura, los pintores vanguardistas no la vieron necesaria desde lo intelectual ni desde lo estético. Los pintores que aún se preocupaban por el tema perspectivo recurrieron a manuales clásicos y preferían el enfoque tradicional; pocos artistas estaban capacitados para comprender el nivel de los avances en la materia y relegaban su uso a lograr efectos convincentes en el espacio y en la arquitectura de las pinturas. Se puede concluir que en el campo de la pintura la perspectiva cayó en desuso.

El desarrollo posterior muestra puntos de vista dispares: Gaspar Monge (1746-1818) pionero francés de la geometría descriptiva y de la ilustración técnica y John Ruskin (1819-1900) esteta inglés enemigo de la tecnología, señalan los contrastes de pensamiento en la evolución de la perspectiva. La proyección se enseñó en las escuelas de arquitectura y escuelas militares, no así en la pintura profesional, por ejemplo, la pintura francesa no tuvo contacto directo con las fórmulas de Monge, la emplearon como herramienta, pero no como esencia de la creatividad, como lo fue para sus predecesores renacentistas; los impresionistas en escaso número la usaron; muchas razones llevaron al descenso de la geometría proyectiva en la pintura.

La virtual desaparición de la geometría proyectiva, la cual permaneció aparentemente inactiva durante unos doscientos años, merece una revisión, pues matemáticos como Monge y Lambert hicieron contribuciones importantes, que son un paso adelante frente a la perspectiva tradicional, la geometría descriptiva con el primero y la proyección ortogonal con el segundo, mostraban ventajas para el dibujo técnico y a la vez facilitaban su adopción en diversos campos técnicos y prácticos.

Cuarto periodo: formalización de la Geometría Proyectiva y desarrollo como rama de la matemática.

El desarrollo descrito condujo a una geometría de gran generalidad y autoridad, conocida como "Geometría Proyectiva". Los primeros resultados suscitaron conjeturas matemáticas, la pregunta inicial fue: ¿Cuáles son las propiedades geométricas que poseen en común, las diferentes secciones de un objeto contemplado desde distintas posiciones? Hallar la respuesta planteaba la búsqueda de propiedades comunes a todas las secciones de la misma proyección y a las secciones de dos proyecciones distintas de una escena dada.

Así como el contorno de un cuadrado cambia, también varían las longitudes de sus lados, las medidas de sus ángulos y la de su área; las líneas que son paralelas en una escena, dejan de serlo y se encuentran en un punto. En general, la longitud, las medidas de ángulos y del área, el paralelismo, no son invariantes de sección a sección, y en consecuencia, dos secciones de la misma proyección no son congruentes y por tanto el problema no está en el terreno de la geometría euclidiana. La rectiliniaridad, el número de lados, permanecen sin variación, el descubrimiento de otras propiedades invariantes requería un conocimiento más profundo (Kline, 1977).

Volviendo a los pioneros de la geometría proyectiva, la importancia del trabajo de Desargues no se encuentra tanto en los conceptos nuevos y teoremas que obtuvo, sino en la introducción de un método que unifica todos los tipos de cónicas al considerarlos como distintas secciones de una misma superficie cónica obtenidas al proyectar una circunferencia desde un punto exterior al plano que la contiene. Así, probando un resultado sobre una circunferencia, tendremos ese mismo resultado en cualquier sección del cono.

A pesar de que Pascal fue grande en muchos campos, pues fue uno de los fundadores del cálculo, maestro de la prosa francesa, famoso polemista en teología, filosofía, etc., el trabajo de Pascal en la geometría proyectiva ocupa sólo un folio, aun así, el llamado teorema de Pascal, "El hexagrama místico", es uno de los más bellos y sugestivos de las matemáticas. Blaise fue contemporáneo de Desargues y fue presionado por este a investigar las propiedades comunes a secciones de proyecciones. (Eves, 1969)

El teorema dice así: "Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos están alineados". Sólo hay indicaciones de cómo la probó y afirma que al ser cierto para el circulo, por proyección y sección debe serlo para todas las cónicas. Este teorema no parece tener relación con el tema de proyección y sección; pero una proyección del círculo es un cono y una sección de este cono no será un círculo, sino una elipse, una hipérbola, o una parábola, esto es una sección cónica; además el hexágono inscrito en el círculo da origen a un hexágono inscrito en la cónica, y cada par de lados opuestos del nuevo hexágono se encuentran en un punto, y los tres puntos de intersección están en una línea recta. De esta forma, el teorema expresa una propiedad de un círculo que se mantiene en cualquier sección de cualquier proyección de aquel círculo; este es un asunto de la geometría proyectiva, muestra que hay propiedades comunes importantes a las secciones de cualquier proyección de una figura dada.

Los logros de estos matemáticos no fueron apreciados en su época, quizá la terminología empleada por ellos engañó a los colegas de su

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

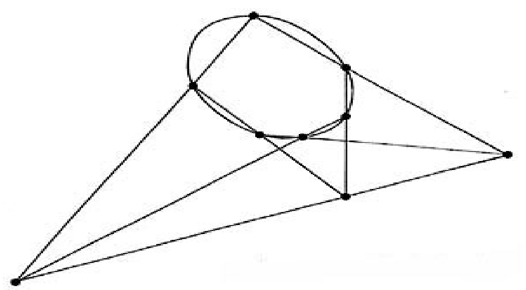

Figura 3. Teorema de pascal (hexagrama místico). Fuente: La autora

tiempo, dijeron que Desargues estaba loco y desecharon su trabajo; la geometría analítica de Descartes y Fermat y el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz mostraron ser muy útiles en las ciencias especialmente en la física, y los matemáticos se concentraron en esos temas.

Philippe de la Hire, alumno de Desargues, hizo una copia manuscrita del libro de Desargues, ejemplar que fue encontrado por casualidad en el siglo XIX en una librería, y por él la humanidad pudo conocer su trabajo. La Hire es el último de los geómetras proyectivos del siglo XVII, su obra *Secciones Conicas* (1685) está dedicada totalmente a los métodos proyectivos, en ella están probadas todas las propiedades de las cónicas de modo sistemático, siguiendo los pasos de Desargues (Collette, 1986).

Pero el objetivo perseguido por estos precursores era la generalización de los métodos utilizados, trataban de mejorar la geometría euclídea y no eran conscientes de que su trabajo implicaba una nueva geometría. Además de los teoremas mencionados, surgieron otras ideas y horizontes de estudio, con los que se dio paso a una renovación de la geometría proyectiva.

Las líneas generales de sus trabajos son las siguientes, la primera idea es la de "*cambio continuo de una entidad matemática"*: fue Kepler el primero en observar que la parábola, la elipse, la hipérbola, la circunferencia y un par de rectas podían obtenerse por un proceso de cambio continuo de una figura a otra. Kepler fijó un foco de la elipse, mientras movía el otro a lo largo de la recta que une los focos, así, considerando la recta como una circunferencia con el centro en el infinito, obtuvo las distintas secciones cónicas. Pascal también pasó hexágonos a pentágonos y estos a cuadriláteros que por un cambio continuo de dos vértices contiguos superpuestos. La segunda idea es la de "*transformación e invarianza":* las propiedades que interesan en la geometría proyectiva son aquellas que permanecen invariantes en la transformación.

Michel Chasles (1793- 1880) fue quien encontró por azar una copia del manuscrito hecho por La Hire, pero los descubrimientos de los pioneros debieron rehacerse de nuevo independientemente por geómetras de este siglo. Gaspard Monge (1746-1818) inventor de la geometría descriptiva, aunque distinta de la proyectiva, utilizó la proyección y sección, a su alrededor alumnos como Charles Julien Brianchon (1785-1864), Lazare Nicholas Carnot (1753-1823) y Jean-Victor Poncelet (1788-1867) intentaron demostrar que los métodos puramente geométricos podían lograr tanto como los métodos algebraicos o analíticos, que cautivaron a Descartes, Leibniz y Newton. (Kline,1977)

A Poncelet se atribuye la resurrección de la geometría proyectiva. Fue oficial del ejército de Napoleón y en una invasión a Rusia fue hecho prisionero en 1813; luego de un año de captura, reconstruyó sin ayuda de libros, lo que había aprendido de Monge y Carnot y obtuvo nuevas conclusiones en la geometría proyectiva. Captó y apreció completamente esta teoría como una nueva rama de las matemáticas, su principal apoyo fue la razón doble, una invariante proyectiva, hecho que fue aprovechado por varios estudiosos del tema en el S XIX. Otro fundamento apreciado por Poncelet fue el de la invarianza de la razón doble, en la cual encontró el argumento para explicar cómo las cónicas en proyección y sección dan objeto a otras cónicas, así abrió una línea de investigación basada en que una sección cónica se determina por la propiedad de la razón cruzada.

Posteriormente, se descubrió el principio de dualidad; dos puntos cualesquiera están situados en una misma recta, pero también es verdad en geometría proyectiva que dos rectas cualesquiera determinan un único punto, en el sentido en que pasan por un solo punto. La segunda afirmación se obtiene de la primera intercambiando las palabras punto y recta, esto es dualizar la afirmación original. El dual de un triángulo es otro triángulo. La afirmación: *dos puntos cualesquiera están situados en una recta* tiene como dual válido en geometría proyectiva: *Dos rectas cualesquiera determinan o pasan por un punto* (Eves, 1969).

Dualizar un teorema permite obtener otro teorema, intercambiando punto y línea se llega a un nuevo enunciado de un nuevo teorema, es más, el intercambio de estas palabras en la demostración de uno de ellos es la demostración dual del otro. Esta es la característica más notable de la geometría por proyecciones. El principio de dualidad muestra cómo obtener nuevos teoremas en los que se encuentran puntos y rectas; por este mismo camino se consigue dualizar enunciados en los que haya curvas, la figura dual de una curva dada, es una colección de rectas que satisface la condición dual de la que define la curva, es natural, pues la curva es una colección de puntos. Así, una curva consiste en una colección de rectas, tal colección sugiere una curva, del mismo modo que la sugiere un conjunto de puntos.

Se pueden determinar los teoremas duales del teorema de Desargues y del de Pascal, el dual del último recibe el nombre de teorema de Brianchon, quien lo descubrió tal como se ha descrito. Se puede repetir el teorema de Desargues en términos duales, teniendo en cuenta que el dual de un triángulo es otro triángulo y suponiendo que el punto O y los dos triángulos están en un mismo plano:

- Teorema de Desargues: *Si dos triángulos son tales que las rectas que unen los vértices correspondientes pasan por un punto O, entonces los pares de lados correspondiendo a los dos triángulos se unen en tres puntos que están situados en una línea recta.*
- Teorema dual, es decir, intercambiando su hipótesis y su conclusión, intercambiando punto y recta se llega a un nuevo teorema: *Si tenemos dos triángulos tales que los puntos que son unión de los lados correspondientes están en una recta O, entonces los pares de vértices correspondiendo a los dos triángulos están unidos por tres rectas que pasan por un punto*.
- De la misma manera, al dualizar el teorema de Pascal, se obtiene otro teorema llamado teorema de Brianchon: *Si circunscribimos un hexágono a un círculo de puntos, las rectas que unen vértices opuestos del hexágono, se encuentran en un punto*. (Kline, 1972 y 1977)

Una vez separado el campo de estudio de la matemática e independizado de sus aplicaciones al arte, el progreso se centra en la formalización, conceptualización y matematización de la geometría proyectiva, y está solamente supeditado al esmero y esfuerzo de los matemáticos y a las necesidades internas del área. Se consolidó la geometría proyectiva como la rama más original en ideas dentro de la matemática, en cuanto a la intuición en su descubrimiento y el rigor en sus pruebas, su terminado lógico, finura de las demostraciones y alcance de los conceptos.

Esta rama de la matemática continúa en desarrollo, hay una geometría proyectiva analítica al igual que existe una euclidiana analítica, las demostraciones en este campo son las más elegantes de toda la matemática; además, el objeto de estudio de este campo se extiende mucho más allá de los conceptos, métodos y teoremas. Las propiedades invariantes tratan de la alineación de puntos, concurrencia de rectas, razón

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

doble, y el protagonismo del punto y la recta en el principio de dualidad; mientras que el objeto de la euclidiana trata de la distancia, ángulos y áreas. Una leve comparación sugiere que las propiedades de la proyectiva son más sencillas, se centra en la formación de figuras cuya congruencia, semejanza y equivalencia se estudian en la geometría euclidiana.

En la proyectiva, las afinidades de congruencia y semejanza pueden analizarse por medio de la proyección y sección de proyecciones especiales, con lo cual la geometría euclidiana no sólo es una subdivisión de la proyectiva, sino que puede asumirse como un conocimiento particular de las propiedades que no varían en proyecciones especiales. Si la proyectiva es lógicamente fundamental para la euclidiana, entonces todos los conceptos de la última deben ser susceptibles de definición en términos proyectivos. Sin embargo, los conceptos basados en la razón doble, se amparan en el concepto de distancia, por tanto, los conceptos proyectivos como la definición de cónica son imperfectos, pues dependen de la razón doble; este fallo fue estudiado por Kail Georg von Staudt (1798-1867), quien enseñó cómo definir la razón doble en términos proyectivos.

El desarrollo de esta geometría fue prolongado y enriquecido por Jacob Steiner (1796-1863), quien construyó las cónicas mediante formas simples y haces de líneas, en este tema aplicó el principio de dualidad y obtuvo varios pares de teoremas duales. Otro estudioso es Arthur Cayley (1821-1895) quien, con Felix Klein (1849-1925), mostró que las geometrías no euclidianas: la lobachevskiana (Lobachevsky, 1793-1856) y de Janos Bolyai (1802-1860), y la geometría elíptica no euclidiana creada por Bernhard Riemann (1826-1866), pueden derivarse como casos especiales de la proyectiva. Klein estableció, según criterios de Cayley, tres tipos de geometrías, la de Euclides, la hiperbólica y la de Riemann, son casos particulares correspondiéndose a los tres tipos de geometrías proyectivas de curvatura constante, siendo la de Rieman una geometría sobre una superficie de curvatura positiva. (Collette, 1986)

Los geómetras del S XIX y comienzos del S XX lograron deducir los teoremas de las geometrías euclidiana y no euclidiana a partir de los conceptos proyectivos. Las investigaciones continúan intentando encontrar principios más simples y pruebas más bellas y elegantes, o en el espacio de *n* dimensiones, se ha unido recientemente la geometría diferencial proyectiva, centrada en propiedades locales o infinitesimales de curvas y superficies.

La afinidad de la proyectiva con las geometrías euclidiana y no euclidiana, se comprobó al final del S XIX y sugirió una nueva aproximación global y totalizante de la geometría (Londoño, 2011). La proyección y sección son casos de *transformaciones*; dada una figura, al formar una proyección desde algún punto, se obtiene una sección de esta proyección, este proceso, que traslada una figura original a la sección, es una transformación. Se plantea entonces la pregunta: ¿Hay transformaciones más generales que la proyección y sección, con propiedades invariantes que puedan ser analizadas?

Una nueva geometría, siguiendo esta línea de pensamiento, es la Topología. Las transformaciones topológicas y las propiedades invariables que se han encontrado en esta rama de la geometría son muchísimas. La topología considera transformaciones más generales que la proyección y sección y por lo tanto la topología es lógicamente anterior a la geometría proyectiva.

Por otra parte, la geometría proyectiva ha sido relevante para otros campos. La influencia de la geometría proyectiva en la física moderna es considerable. Al estudiar la teoría de la relatividad, se reconoció que las leyes del universo pueden variar de un observador a otro, esas leyes se ven como invariantes de las leyes respecto a cualquier transformación del sistema de coordenadas de uno a otro observador. El énfasis en la invarianza resultó natural por el trabajo en geometría proyectiva. Cuando en física se buscó una forma matemática de expresar las leyes científicas que permanecen invariantes bajo el sistema de coordenadas, la geometría proyectiva ya había encontrado el modelo.

A finales del S XIX se emplearon en la geometría proyectiva métodos algebraicos para facilitar el estudio de las propiedades invariantes. En términos algebraicos, las propiedades de las figuras son expresiones del algebra y la transformación proyectiva de sección a sección es un cambio de un sistema de coordenadas a otro: en esa transformación de coordenadas la invarianza proyectiva conserva su forma algebraica. Es precisamente Klein quien introdujo no sólo un orden en la geometría por el reparto de las propiedades de las figuras en clases que corresponden cada una a un grupo de transformaciones, sino en adelante, se consideró la geometría como estudio de propiedades invariantes en los diversos grupos de transformaciones.

Estas razones motivaron el estudio de la teoría de la invariancia de las formas algebraicas, al cambiar de sistemas de coordenadas. Al respecto resultó de gran utilidad para la física el estudio de los tensores. Mediante el cálculo tensorial, se expresan convenientemente las leyes científicas de manera que se satisfaga el requisito de no variar en el sistema coordenado. La teoría de tensores o cálculo tensorial, como consecuencia de la geometría proyectiva, resultó de gran apoyo para los físicos ya que facilita expresar las leyes científicas sin que varíen al cambiar de coordenadas. Los proyectivos iniciaron el estudio de los conceptos y técnicas empleados en la teoría de la relatividad, sin que haya mediado, por su parte, una mínima traza de previsión (Kline, 1977).

Se puede concluir que la geometría proyectiva inició el estudio de conceptos y técnicas empleados en la teoría de la relatividad, contribución imprevista incluso para los estudiosos del S XIX. Junto a otros campos de la matemática como las ecuaciones diferenciales esta geometría ha contribuido al adelanto de la ciencia. Empero, ninguna rama es tan original en ideas, en coordinación de la intuición, en el descubrimiento y rigor de la prueba, en el terminado lógico, en la elegancia de las demostraciones y el alcance de los conceptos.

Conclusiones: Reflexiones Epistémicas y Didácticas

Son varias las razones que condujeron a este examen, unas de carácter epistémico, otras de naturaleza historiográfica, pedagógica, y otras matemáticas unidas al gusto por el arte.

¿Por qué una reflexión epistemológica e historiográfica? El desarrollo del pensamiento en el individuo cognoscente, muestra un paralelo con el progreso histórico de la ciencia al nivel de los mecanismos cognitivos. La semejanza entre el desarrollo ontogenético de la inteligencia en el individuo y filogenético en la historia, en cuanto a los procesos que muestran el movimiento intelectual desde lo pre-científico a lo científico, es un hecho epistemológico ya estudiado por Jean Piaget. (Corredor, 2012a) Se ha aceptado que en la formación de conocimientos matemáticos se presentan mecanismos análogos tanto en el progreso del pensamiento matemático individual, como en las etapas históricas del devenir científico de esta disciplina. (Piaget, 1982). Esta es la razón más relevante a la hora de tener en cuenta la historia de una ciencia como fuente de análisis para superar posibles dificultades a nivel epistemológico y pedagógico.

La historia analizada como reconstrucción de la evolución del desenvolvimiento lógico del pensamiento, no como registro anecdótico o biográfico, facilita comprender el avance de una ciencia conociendo las ideas primigenias que fundamentan los logros teóricos, su apoyo en las prácticas y aplicaciones, las limitaciones y carencias de ciertos lapsos del desarrollo, es una historia de la cual la epistemología y la didáctica se nutren (Piaget y García, 1982). La

https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2019v14n2.5895

epistemología y la pedagogía emplean la historia como laboratorio en el cual ponen a prueba sus conjeturas y donde apoya sus tesis sobre la producción y adquisición de conocimientos (Piaget, 1983, p.76). Si bien es cierto que la historia definida, organizada y traducida en términos temporales tiene un valor nada despreciable, también lo es la historia desde la óptica de la recuperación de los grandes períodos del pensamiento y sus repercusiones actuales, una visión transhistórica y multidisciplinaria que invita a ampliar la perspectiva intelectual hasta considerar los conocimientos centrales de un período y su relación con otros saberes (Piaget, 1975)

¿Cuáles son las razones pedagógicas? No se puede conocer completamente una ciencia mientras no se estudie su historia y no se puede enseñar aquello que no se conoce; quizá por esta razón, un problema de didáctica implica muchas veces un problema epistemológico y otras tantas un problema histórico. La didáctica se sirve de la historia para reconocer la forma más acertada de acceso a una teoría o conocimiento particular. Reconociendo la evolución periódica se trazan caminos que recorridos a pasos agigantados y extrayendo esencialmente los procesos, permiten un acceso seguro y en cierto modo más fácil, hacia conocimientos que en la actualidad parecen oscuros, demasiado abstractos o inexplicables. Cuando un individuo se enfrenta a un problema matemático, intenta asimilarlo a estructuras mentales ya existentes, esto significa el intento de resolverlo mediante conocimientos que ya posee, como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye expandiéndose para acomodarse a la nueva situación. En forma similar, los científicos de un periodo histórico determinado se valen de los conocimientos validados hasta el momento, para resolver interrogantes y así generar nuevas ideas, consecuencias o teorías nuevas.

A su vez, la didáctica se sirve de la historia para reconocer en el desarrollo de las nociones y conceptos, las formas más acertadas para trazar caminos de acceso al conocimiento. En este se sentido, conociendo la evolución se pueden dar pasos agigantados pero certeros para acceder más fácilmente a conocimientos que en la actualidad pueden parecer oscuros, demasiado abstractos, o inexplicables. La historia muestra esas formas de ingresar a teorías que en la actualidad parecen terminadas y a su vez elaboradas intrincadamente. En la enseñanza de la matemática y por ende de la geometría, muchas veces se tropieza con dificultades de este tipo, pero con ayuda de un conocimiento adecuado de su desarrollo histórico, se pueden encontrar soluciones didácticas adecuadas y convenientes.

El estudio anterior invita a manejar procesos pedagógicos que muestren la geometría como ciencia dinámica, en permanente construcción, extraordinariamente rica en saber y aplicación, que ha venido creciendo a base de esfuerzos y superación de lo concreto o inmediato a lo más general y abstracto, de lo técnico hacia lo científico. Un desarrollo que invita a recapacitar sobre la primera necesidad, la de la coordinación de acciones con lo concreto y con la solución a una necesidad, a interpretar el surgimiento en medio de la practicidad, a ir de lo particular a la generalización, a revisar la generación de conjeturas y la importancia de la maduración de conceptos en la construcción de la ciencia, para luego crecer en independencia y de ahí lograr la formalidad y matematización como última fase.

El conocimiento de la evolución histórica de la perspectiva es útil para la epistemología y la pedagogía. Algunos conceptos matemáticos parecen alejados de toda realidad, puesto que se dan en su forma final actual y elaborada dejando en incógnito el nacimiento y desarrollo, caso de la topología y de la geometría actuales. Este recorrido evolutivo brinda un acercamiento amable a estas ciencias y permite explorar un camino didáctico más acertado para su comprensión: muestra el movimiento desde lo precientífico, mecánico e intuitivo a lo científico, formal y riguroso de la matemática y quizá permita extraer procesos didácticos para sortear las dificultades de aprendizaje y comprensión, sin detrimento de los contenidos de por sí elevados y sin pretender extender cortinas de humo tras una facilidad no existente, caso frecuente de didácticas corrientes, desde las cuales se da un barniz, con aires de facilismo que no concuerdan con el auténtico valor científico.

Referencias bibliográficas

Collete, Jean–Paul (1986). Historia de las matemáticas. Volumen II. 2ª ed., México. Siglo XXI editores.

Corredor, Magaly (2012a). "Estudio sociogenético de la perspectiva lineal y la geometría proyectiva". Proyecto de investigación, Tunja, UPTC.

Corredor, Magaly (2012b). "Epistemología y sociogénesis de la geometría". En: Revista Cuestiones de filosofía. N 14, Tunja, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, pp.36-56.

Eves, Howard. (1969). Estudio de las geometrías. Tomo I y II. 1º ed., México, Uteha.

Enciclopedia. Historia Universal del arte (2003). Tomo 6. "El Renacimiento". Madrid, Espasa Calpe. Kemp Martín (2000). La ciencia del arte. Madrid. Akal ediciones.

Kline, Morris (1972). El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días. Tomos 1 y 2. Madrid, Alianza Editorial.

Kline, Morris (1977). "Geometría proyectiva". En: Sigma el mundo de las matemáticas. Volumen 4. Compilación de James R Newman. Barcelona, Grijalbo.

Londoño, Carlos Arturo y Prada Blanca (2011). "Lecciones epistemológicas de la historia de la geometría." En: Revista Cuestiones de filosofía. N 13, Tunja, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. pp. I83-211. https://revistas.uptc.edu.co/index.php/cuestiones_filosofia

Newman James R. (1997). "Durero y la matemática de la pintura". Sigma el mundo de las matemáticas Volumen 4. Barcelona. Grijalbo.

Panofsky, Erwin. (1997). "Durero como matemático". En: Sigma el mundo de las matemáticas. Volumen 4. Barcelona. Grijalbo.

Piaget, Jean. (1975). Introducción a la epistemología genética. 1. El pensamiento matemático. Buenos Aires, Paidos. Piaget, Jean y García Rolando. (1982) Psicogénesis e historia de la ciencia. Siglo XXI.

Piaget, Jean (1983). Psicología y pedagogía. Altamira, Sarpe

Zöllner, Frank. (2007). Leonardo Da Vinci (1452-1519): Obra pictórica completa y obra gráfica. China. Taschen.