La resolución de problemas como formas de pensar variacional en profesores de matemáticas en formación

Problem Solving as Variational Ways of Thinking in Math Teachers in Training

Luis-Fernando Mariño[1]
Universidad Francisco de Paula Santander – Cúcuta, Colombia
fernandoml@ufps.edu.co

Rosa-Virginia Hernández[2]
Universidad Francisco de Paula Santander– Cúcuta, Colombia
rosavirginia@ufpse.edu.co

César-Augusto Hernández-Suárez[3]
Universidad Francisco de Paula Santander – Cúcuta, Colombia
cesaraugusto@ufps.edu.co

Cómo citar/ How to cite: Mariño, L., Hernández, R. & Hernández C. (2023). La resolución de problemas como formas de pensar variacional en profesores de matemáticas en formación *Revista Saber, Ciencia y Libertad*, 18(1), 435 – 458. https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2023v18n1.10232

Resumen

El trabajo tuvo como propósito caracterizar la resolución de problemas como forma de pensar manifestada por un grupo de estudiantes que se forman para profesores de matemáticas. La investigación con un enfoque cualitativo y un diseño desde la teoría fundamentada estuvo centrada en responder la pregunta, ¿cómo son las formas de entender y las formas de pensar de un grupo de profesores de matemáticas en formación cuando resuelven problemas en dominios discretos? Los participantes fueron 21 estudiantes que tomaron un curso de Teoría de Números en un programa que forma profesores de Matemáticas en la

Fecha de recepción: 5 de septiembre de 2022
Fecha de evaluación: 9 de octubre de 2022
Fecha de aceptación: 30 de noviembre de 2022

1 Doctor en Educación Matemática. Docente investigador de la Universidad Francisco de Paula Santander.

2 Magister en Educación Matemática. Docente investigador de la Universidad Francisco de Paula Santander.

3 Magister en Enseñanza de las Ciencias - Universidad Nacional Experimental del Táchira (Venezuela). Docente investigador de la Universidad Francisco de Paula Santander.

Universidad Francisco de Paula Santander (Cúcuta, Colombia). Para el análisis de datos provenientes de nueve experimentos de enseñanza y una entrevista retrospectiva semiestructurada se utilizaron los procesos de codificación abierta, axial y selectiva. Entre los hallazgos se destaca la manera como los participantes interpretaron condiciones necesarias, condiciones suficientes, relaciones, convergentes y las infinitas soluciones a cada problema. Estas formas de interpretar condujeron a los estudiantes a entender relaciones, patrones y estrategias para convencer y resolver problemas en contextos locales. Como núcleo de la teoría se caracterizaron las formas de entender y pensar como un proceso variacional que va desde la interpretación como forma de entender la resolución de problemas en contextos locales a establecer relaciones, crear estrategias para la generalización y la prueba como formas de pensar la resolución de problemas en una variedad de contextos.

Palabras clave

Resolución de problemas; formas de entender; formas de pensar; ecuaciones lineales diofánticas; teoría fundamentada; profesores en formación.

Abstract

The purpose of the work was to characterize problem solving as a way of thinking manifested by a group of students who are trained to be math teachers. The research with a qualitative approach and a design from the grounded theory was focused on answering the question, how are the ways of understanding and ways of thinking of a group of mathematics teachers in training when they solve problems in discrete domains? The participants were 21 students who took a course in Number Theory in a program that trains professors of Mathematics at the Francisco de Paula Santander University (Cúcuta, Colombia). For the analysis of data from nine teaching experiments and a semi-structured retrospective interview, open, axial and selective coding processes were used. Among the findings is the way the participants interpreted necessary conditions, sufficient conditions, relationships, convergents and the infinite solutions to each problem. These ways of interpreting led students to understand relationships, patterns, and strategies for convincing and solving problems in local contexts. At the core of the theory, ways of understanding and thinking were characterized as a variational process ranging from interpretation as a way of understanding problem solving in local contexts to establishing relationships, creating strategies for generalization, and testing as ways of thinking about problem solving in a variety of contexts.

Keywords

Problem solving; ways of understanding; ways of thinking; Diophantine linear equations; grounded theory; teachers in training.

Introducción

Explorar cómo piensan matemáticamente las personas es una tarea difícil pero enriquecedora. Soto et al. (2022), afirman que, cuando los seres humanos hacen matemáticas realizan actos mentales como contar, interpretar, representar, estructurar, conjeturar, demostrar, probar y resolver problemas (Harel, 2008a). Para Berth y Piaget (1966) estos actos son acciones mentales. En este mismo sentido, los actos y acciones mentales para Burton (1984) y Falk (1994) son operaciones del pensamiento matemático.

Berth y Piaget (1966), caracterizaron la matemática como la coordinación de acciones mentales que son reversibles y componibles. Norton (2022), siguiendo las ideas de Piaget construye modelos psicológicos de las matemáticas de los estudiantes al identificar las acciones mentales que los estudiantes tienen disponibles y la forma como las coordinan para resolver tareas y construir conceptos matemáticos.

Por su parte Harel (2013, 2010, 2008b, 2008c), Harel y Sowder (2005), fundamentan sus trabajos en la premisa: las acciones mentales de los seres humanos, observables o inferidas, son inducidas y gobernadas por sus visiones generales del mundo y viceversa. Las visiones generales de los seres humanos sobre el mundo están formadas por estas acciones.

Esta premisa los llevó a distinguir entre dos categorías del conocimiento: formas de entender y formas de pensar, que surgen a partir de tres actividades matemáticas interrelacionadas: 1) la comprensión de contenidos matemáticos, cuando se leen textos o se escuchan a otros, 2) al realizar una investigación, como cuando se resuelve un problema, y 3) al establecer la verdad, cuando se justifica o refuta.

Harel y Sowder (2005) y Harel (2008a), definieron una forma de entender como "un producto cognitivo del acto mental realizado por un individuo" (p. 269) y una forma de pensar como "una característica cognitiva de un acto mental" (p. 269). La expresión forma de entender transmite el razonamiento que se aplica en una situación matemática local. Mientras que la expresión forma de pensar, se refiere a lo que gobierna las formas de entender de la persona y expresa que el razonamiento no es específico de una situación particular sino de una multitud de situaciones. Las formas de pensar de una persona incluyen al menos tres categorías interrelacionadas: creencias, enfoques de resolución de problemas y esquemas de prueba.

Desde otro punto de vista, Burton (1984) afirma que las personas piensan acerca de algo, una observación o un acontecimiento; como estímulos para empezar a pensar. Estos eventos proporcionan los elementos sobre los cuales opera el pensamiento. Para esta autora, el estudio de las relaciones es fundamental cuando se hace matemáticas. Además, los elementos pueden relacionarse de muchas maneras entre ellos mismos o con otros elementos, por ejemplo, ordenando, haciendo correspondencias o formando clases de equivalencia.

Combinar elementos o reemplazarlos unos por otros puede llevar de un estado a un nuevo estado (Burton, 1984). El modelo de Burton (1984), acerca de los procesos de pensamiento matemático, devela cuatro subprocesos fundamentales: a) especializar, b) conjeturar, c) generalizar y d) convencer.

En lo que respecta al termino problema y su resolución, ha habido diversas caracterizaciones. Desde un punto de vista clásico y conceptual se entiende por problema una dificultad teórica o práctica que provoca en una persona una actitud indagadora que a la vez enriquece su conocimiento (Kupisiewicz y Choluj, 1964). Para Morgan (2010), un problema es básicamente una situación de conflicto en la que el individuo encuentra inhibición para alcanzar una meta. Mientras que para Mayer (2010) un problema consiste en un estado, donde se describe la situación actual y un estado objetivo, es decir el estado deseado. Por tanto, un problema se produce cuando una situación está en un estado, el solucionador quiere llevarla a otro estado, pero hay una serie de obstáculos que no permite que la transición entre estados fluya fácilmente.

La resolución del problema por su parte es como encontrar una salida a una dificultad, una forma de sortear un obstáculo (Polya, 1945). Para Mayer (2010), la resolución del problema se produce cuando el solucionador se compromete en una actividad cognitiva dirigida a superar el problema. Según Gagné (1965) la resolución de problemas es el proceso mediante el cual la situación incierta es clarificada, e implica en mayor o menor medida, la aplicación de conocimientos y procedimientos por parte del solucionador.

Diversos investigadores han hecho aportes en cuanto a los procesos de resolución de problemas. Polya (1981, 1945), caracterizó la resolución de problemas en cuatro fases: entender el problema, idear un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás en el trabajo. Mason et al. (2010) plantearon tres fases: entrada, ataque y revisión. Mayer (2010) divide la resolución de problemas en dos subprocesos que los denominó, representación del problema y solución del problema. Por su parte, Schoenfeld (2016) especificó cinco dimensiones que intervienen directa, dinámica e inter-relacionadamente: 1) dimensión cognitiva, 2) heurísticas, 3) dimensión metacognitiva, 4) dimensión afectiva y 5) práctica matemática.

Desde el punto de vista educativo, las actividades de enseñanza y aprendizaje deben estar dirigidas a potenciar el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante. Pero, en la realidad parece ocurrir todo lo contrario. Una posible razón es que los profesores conciben y enseñan la matemática como un cuerpo estructurado y pulido de conocimientos aprobado por una comunidad de matemáticos (Dreyfus, 2002), sin significado alguno para el estudiante.

Una posible vía para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante es la resolución de problemas. Para resolver un problema, el estudiante tiene que coordinar acciones mentales, la coordinación de estas acciones mentales conducen al estudiante a pensar matemáticamente y construir estructuras matemáticas (Norton, 2022). Para que el profesor tenga éxito en esta tarea debe buscar diferentes estrategias, entre ellas puede optar por explorar y conocer cómo piensan matemáticamente los estudiantes.

La educación matemática ofrece una posible ruta para esta tarea, puesto que tiene sus raíces en las ciencias cognitivas y la matemática (Schoenfeld, 1987). La investigación en esta disciplina debe aportar a dos propósitos: el primero teórico, acerca de conocer la naturaleza del pensamiento matemático y el segundo práctico, el cómo utilizar estas caracterizaciones para mejorar los procesos de aprendizaje y enseñanza de esta área (Schoenfeld, 2000).

Tradicionalmente, las investigaciones para caracterizar la resolución de problemas y el pensamiento matemático han sido realizadas desde una variedad de contextos, con diferentes propósitos, pero poco exploradas conjuntamente. Por ejemplo, en lo que concierne a la resolución de problemas la gran mayoría utilizan situaciones en el contexto de los números reales. Mientras que, las relacionadas con el pensamiento matemático usan una gran variedad de situaciones contextos utilizando aportes teóricos de autores clásicos, muy pocas de ellas involucran un tipo de pensamiento especifico.

El reporte presentado en este escrito ilustra cómo se utilizó la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax+by=c$ para explorar la forma como pensaron matemáticamente un grupo de estudiantes, específicamente las formas cómo entendieron y pensaron al resolver estos problemas desde la variación y el cambio.

Las ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax+by=c$ se caracterizan porque tanto los coeficientes a, b y c, como las soluciones (números que pueden tomar las variables x e y) son números enteros, es decir se encuentran en dominios discretos. Aunque parezca curioso, este tipo ecuaciones son fáciles para el resolutor en el contexto de los números reales, mientras que en el contexto de los números enteros requiere de intuición, creatividad, habilidades y diversas estrategias, más aún cuando se imponen algunas condiciones específicas a la solución requerida.

Las ecuaciones diofánticas de la forma $ax+by=c$ tienen solución sí y sólo sí c divide a d, donde d es el máximo común divisor de a y b, es decir, $d=mcd(a,b)$. Si la pareja de números enteros (x_0, y_0) es una solución particular, las soluciones a esta ecuación son de la forma $x=x_0+(b⁄d)t$ y $y=y_0-(a⁄d)t$, donde t es un número entero cualquiera conocido como parámetro (Koshy, 2007).

Desde este panorama, la investigación desde un enfoque cualitativo tuvo como propósito dar respuesta a la pregunta: ¿cómo son las formas de entender y las formas de pensar manifestadas por un grupo de profesores de matemáticas en formación cuando resuelven problemas de ecuaciones diofánticas de la forma $ax+by=c$?

Método

Enfoque y Diseño de Investigación. Para responder la pregunta acerca de ¿cómo entendían y pensaban variacionalmente el grupo de profesores de matemáticas en formación?, la primera acción que orientó la investigación fue hacer claridad y diferenciar entre los actos o acciones mentales y los resultados de estas acciones mentales de los participantes. Por tanto, se optó por un enfoque cualitativo con un diseño desde la teoría fundamentada con el propósito de elaborar teoría a partir de los datos.

Cualitativo debido a que el propósito del estudio estuvo centrado en interpretar y dar sentido a las manifestaciones escritas y verbales de los participantes cuando resolvieron problemas. El diseño desde la teoría fundamentada puesto que la recolección y análisis de datos se realizó simultáneamente, permeada siempre por el método de comparación constante. Esta forma de trabajo llevó a diseñar y rediseñar permanentemente los experimentos de enseñanza. Además, los procesos de codificación abierta, axial y selectiva orientados por el muestreo teórico condujeron a la elaboración de conceptos y categorías iniciales que finalmente posibilitaron construir el núcleo de la teoría formal.

Participantes. Un grupo de 21 estudiantes que se forman para profesores de matemáticas y tomaron un curso de Teoría de números durante el primer semestre del año 2021 en un programa de la Universidad Francisco de Paula Santander en la ciudad de Cúcuta, fueron los participantes. El 36% de los participantes fueron mujeres, el 64% restante fueron hombres. Las edades del 88% de los estudiantes oscilaron entre 18 y 23 años. Todos los participantes terminaron su educación de nivel secundario en colegios públicos de la región nororiental de Colombia.

El acceso y contacto con los participantes se da de forma natural, puesto que el investigador principal fue el profesor que orientó la materia Teoría de Números. Al inicio del curso se comentó la forma en que se desarrollaría el trabajo. Todos los estudiantes estuvieron de acuerdo acerca de algunas videograbaciones que se hicieron, así como las entrevistas voluntarias, el manejo y responsabilidad ética que se dio a la información recolectada. Incluso, al final de las entrevistas cuatro estudiantes estuvieron de acuerdo en que se podían utilizar sus nombres propios.

Fuentes de Datos. Como técnicas para recolectar la información se diseñaron y rediseñaron permanentemente nueve experimentos de enseñanza adaptando la estructura y las fases de: (a) diseño y planeación, b) experimento en el aula y c) análisis retrospectivo, propuestos por Steffe et al. (2000) y la adaptación de una entrevista clínica de Piaget retrospectiva semiestructurada (Ginsburg, 1981; Ernest, 1993; Bryant y Charmaz, 2019).

Estrategia Metodológica. Teniendo en mente los elementos distintivos de la teoría fundamentada: recolección, codificación y análisis simultáneo de datos orientados por el muestreo y saturación teórica, se diseñó e implementó un plan caracterizado por tres intervenciones con un trabajo paralelo de codificación y análisis de datos (Corbin y Strauss, 1990, 2008, 2017). La Figura 1 muestra un esquema de la estrategia que se puso en marcha para realizar el trabajo.

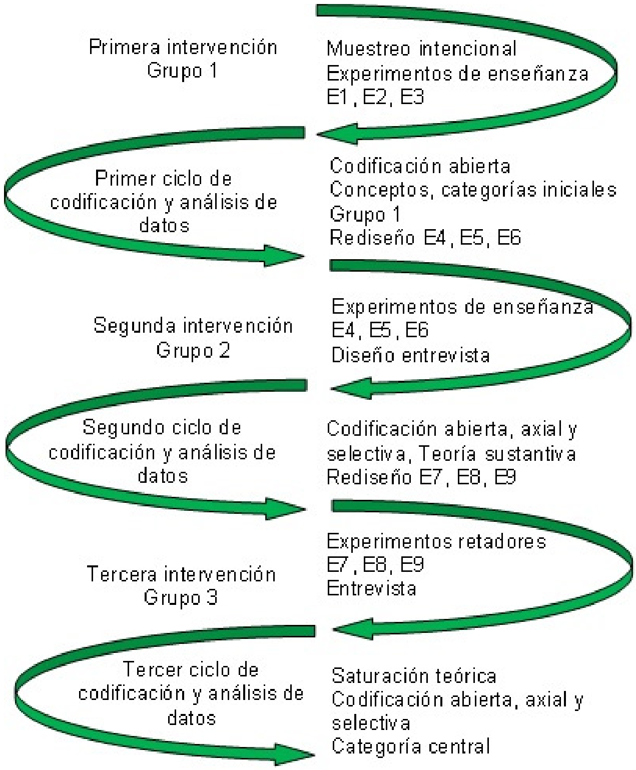


Figura 1. Estrategia de investigación.
Nota. Los símbolos E1, E2, ..., E9 representan los experimentos de enseñanza.

En el esquema de la Figura 1, un Grupo no representa personas, representa la forma de solución de problemas por un método determinado. El trabajo de ida y vuelta sobre los datos muestra la manera como se realizaron paralelamente tres intervenciones y tres ciclos de codificación y análisis de datos. Simultáneamente se rediseñaron los experimentos de enseñanza para ser implementados en la siguiente intervención. Al final de la tercera intervención se entrevista a siete estudiantes que voluntariamente accedieron a participar en ella. El trabajo finaliza cuando el investigador considera que nuevos datos no aportan a las categorías construidas, lo que en términos de la teoría fundamentada se conoce como saturación teórica (Corbin y Strauss, 1990, 2008, 2017).

Recolección y Análisis de Datos orientados por el Muestreo y Saturación teórica. El propósito del muestreo teórico realizado se caracterizó en cuatro fases: a) búsqueda de conceptos y categorías iniciales, b) aprender más sobre los conceptos y categorías iniciales, c) aumento de la teoría en profundidad y d) nuevas vías de muestreo que condujeron a la saturación teórica. Siguiendo estos lineamientos derivados de la teoría fundamentada a continuación se ilustra el trabajo paralelo en la recolección y análisis de datos.

Primera intervención, Primer Ciclo de Codificación y Análisis de Datos

Recolección de Datos. Como se mostró en la Figura 1, en esta fase se inició el trabajo en vivo con los participantes al implementar los tres primeros experimentos de enseñanza codificados como E1, E2 y E3, correspondientes al Grupo 1. El experimento de enseñanza codificado como E1 hace referencia al máximo común divisor de dos números enteros a y b, escrito como $mcd(a, b)$. En la Cuestión 2 (C2) del E1, se pidió a los participantes que hallaran el $mcd(a, b)$, siguiendo el Algoritmo de Euclides. Es importante aclarar que el $mcd(a, b)$ debe dividir exactamente a c para que la ecuación $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros.

Para el caso, los pares de números fueron (35,56), (819,16) y (5913,7592). La Figura 2, parte a) y b) muestra el trabajo del participante seis (P6) codificado como P6E1C2. En la parte a) se observa el proceso del Algoritmo de Euclides donde el participante representa las divisiones sucesivas mediante igualdades para hallar el $mcd(5913{,}7592)$. Mientras que en la parte b) de la misma figura se observa la tabla elaborada para responder la Cuestión 3 (C3).

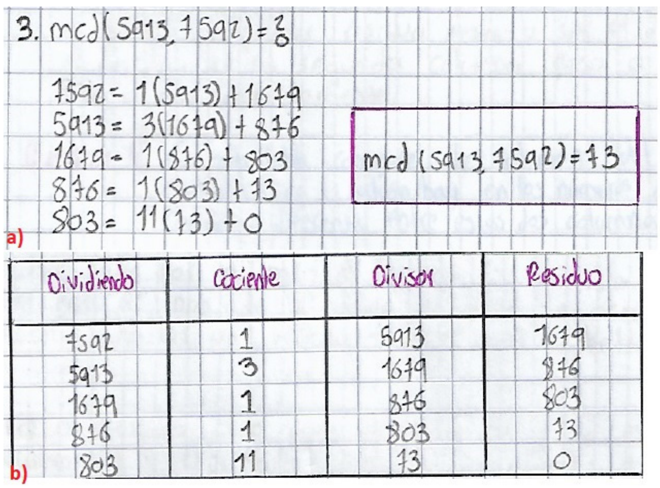


Figura 2. Manifestaciones escritas P6EP1C2.

La Cuestión cinco (C5) del mismo experimento decía: En cada una de las tablas elaboradas compare las columnas del residuo y el divisor. ¿Qué característica o patrón hay entre los números de cada columna?, ¿Qué encuentra de común o diferente entre estas dos columnas? Explique su respuesta. La respuesta del participante seis, codificada como P6E1C5, fue:

P6E1C5: en cuanto a la característica que hay en cada columna es que cada valor de estos es un múltiplo del máximo común divisor o, en otras palabras, cada valor se puede dividir exactamente por el máximo común divisor hallado, y si comparamos las columnas podemos ver que posee términos en común. Esto es porque el primer residuo pasa a ser el divisor de la siguiente fila, luego el residuo de la segunda columna pasa a ser el divisor de la tercera fila y así sucesivamente. (El texto se transcribió tal y como lo escribió el participante seis).

Al responder esta misma cuestión el participante cuatro, codificado como P4E4C5, respondió:

P4E4C5: el primer residuo pasa a ser el siguiente divisor. Todos tienen un mismo divisor.

Por otro lado, los experimentos de enseñanza E2 y E3 hacen referencia a la solución a la ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ utilizando el método de la pendiente. En la cuestión 1 (C1) del experimento dos (E2) se planteó a los estudiantes que resolvieran la ecuación $6x + 21y = 102$, con los conocimientos que tenían a su disposición. Como era de esperarse los participantes empezaron a trabajar en el contexto de los números reales y no pudieron resolver la ecuación. Por tanto, el investigador sugiere que empiecen a buscar parejas de números enteros para las variables x e y de tal manera que se cumpla la igualdad. La Figura 3, evidencia el trabajo de los participantes seis y dos al resolver esta cuestión.

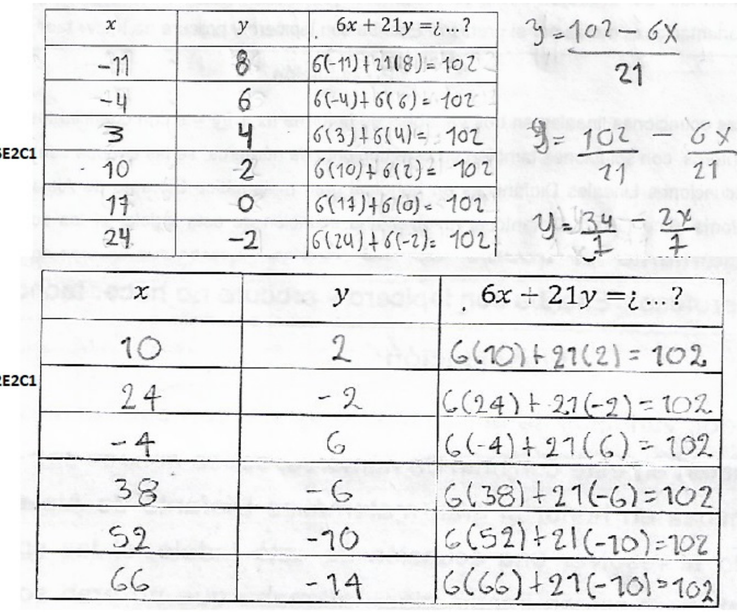
La cuestión 2 pedía: Analice los valores de la columna de las x. ¿Encuentra algún patrón o relación entre estos valores?, escríbalo. Haga lo mismo con los valores de la columna de la y. El participante P6, al analizar y revisar su trabajo respondió:

P6E2C2: Pues mirando la pendiente de la ecuación podemos ver que la diferencia entre cada valor de x es de 7 y entre cada valor de "y" la diferencia es de 2.

Por su parte P2E2C2, responde: según la columna "x" el patrón que tiene es que

a) P6E2C1

b) P2E2C1



x	y	$6x + 21y =¿ \ldots ?$
-11	8	6(-11)+21(8)= 102
-4	6	6(-4)+6(6)= 102
3	4	6(3)+6(4)= 102
10	2	6(10)+6(2)= 102
17	0	6(17)+6(0)= 102
24	-2	6(24)+6(-2)= 102

$$y = \frac{102 - 6x}{21}$$

$$y = \frac{102}{21} - \frac{6x}{21}$$

$$y = \frac{34}{7} - \frac{2x}{7}$$

x	y	$6x + 21y =¿ \ldots ?$
10	2	6(10)+21(2)=102
24	-2	6(24)+21(-2)=102
-4	6	6(-4)+21(6)=102
38	-6	6(38)+21(-6)=102
52	-10	6(52)+21(-10)=102
66	-14	6(66)+21(-10)=102

Figura 3. Manifestación escrita participantes P6E2C1 y P2E2C1.

a cualquier valor de "x" que cumpla la igualdad se le adiciona o disminuye "7" y al valor de "y" si a "x" se le adiciona "y" se le disminuye (2) y si a "x" se le disminuye (7) a "y" se le adiciona (2).

La cuestión 3 pedía: ¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad?, explique. Las respuestas de los mismos participantes fueron:

P6E2C3: Que los valores de x y y aumenten o disminuyan proporcionalmente en base a un valor que depende de la pendiente.

P2E2C3: El valor que se encuentre de "x" y "y" debe adicionarle a uno y disminuirle al otro. Pero, no ambos valores disminuirles o adicionarles al mismo tiempo.

Codificación abierta y análisis de datos. Luego de haber realizado la primera intervención, se inicia el proceso de codificación abierta con la intención de interpretar y dar sentido a los datos. De allí surgen los primeros conceptos indicadores, se denominan así puesto que emergen directamente de las manifestaciones escritas de los participantes.

Desde la teoría fundamentada un concepto tiene dos elementos distintivos: propiedades y dimensiones. Las propiedades son características del concepto mientras que las dimensiones representan el rango de variabilidad de cada una de las propiedades. Teniendo esto en mente, surgió el primer código o concepto indicador que se denominó, formas de interpretar el $mcd(a, b)$ como forma de entender se muestra en la Tabla 1, codificado y analizado desde la variación y el cambio.

Tabla 1. Elementos teóricos clave para caracterizar la práctica pedagógica.

<table>
<tr><th>Concepto indicador</th><th>Datos</th><th>Propiedad</th><th>Dimensión</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Formas de entender el $mcd(a, b)$</td><td>Representa la mayor cantidad de grupos con los elementos de los conjuntos que representan a a y b como conjuntos</td><td rowspan="2">Formas de relacionar el $mcd(a, b)$ con los números a y b</td><td rowspan="4">Tipos de interpretación dada al $mcd(a, b)$</td></tr>
<tr><td>El entero más grande que divide exactamente a a y b</td></tr>
<tr><td>Es un proceso de divisiones sucesivas</td><td rowspan="2">El $mcd(a, b)$ como proceso</td></tr>
<tr><td>$mcd(a, b) = as + bt$ es un proceso de ingeniería inversa al Algoritmo de Euclides</td></tr>
<tr><td>Variable</td><td colspan="3">Interpretación dada al $mcd(a, b)$ por el participante</td></tr>
<tr><td>Cambio</td><td colspan="3">Formas de interpretación</td></tr>
<tr><td>Descripción</td><td colspan="3">Formas de interpretar del $mcd(a, b)$ como formas de entender el $mcd(a, b)$ de dos números enteros a y b.</td></tr>
</table>

El proceso de codificación y análisis continúa de la misma manera. La Tabla 2, muestra el microanálisis realizado para el concepto indicador: Formas de entender soluciones particulares a la ecuación $ax + by = c$.

Tabla 2. Formas de interpretar como formas de entender las soluciones particulares.

Concepto indicador	Datos	Propiedad	Dimensión
Formas de entender las soluciones particulares	Los valores de x e y aumentan o disminuyen proporcionalmente en base a un valor que depende de la pendiente.	Formas de relacionar los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad	Formas de interpretar la combinación de los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad

Concepto indicador	Datos	Propiedad	Dimensión
Formas de entender las soluciones particulares	El valor que se encuentre de "x" y "y" debe adicionarle a uno y disminuirle al otro. Pero, no ambos valores disminuirles o adicionales al mismo tiempo Si (x_0, y_0) es una solución particular se debe adicionar a x_0 y disminuir a y_0, pero no disminuirle o adicionarles a ambas al mismo tiempo.	Formas de relacionar los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad	Formas de interpretar la combinación de los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad
Variable	Interpretación a las formas de relacionar los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad.		
Cambio	Tipos de interpretación dada a las formas de relacionar los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad		
Descripción	Tipos de interpretación dada a las formas de relacionar los números que se pueden asignar a x e y para cumplir la igualdad		

El proceso de codificación y análisis se realizó a la totalidad del experimento de aprendizaje y no pregunta a pregunta, esto con el propósito de dar sentido a las manifestaciones escritas de los participantes. Como es de esperarse surgieron otros códigos o conceptos iniciales que no se muestran por cuestiones de espacio. Siguiendo estos códigos iniciales y teniendo en mente la pregunta de investigación se revisaron y rediseñaron los experimentos E4, E5 y E6.

Segunda Intervención, Codificación Abierta, Axial y Análisis de Datos

Esta fase al igual que la siguiente se caracteriza por ser hibrida. Hibrida en el sentido de que se recolectaron nuevos datos, se analizaron y surgieron nuevos códigos. Paralelamente se inicia el proceso de codificación axial que consistió en agrupar los códigos iniciales en conceptos de nivel superior que se denominan categorías, mediante un proceso de la búsqueda de diferencias o similitudes entre los conceptos iniciales. Se siguieron aquí los lineamientos de Strauss y Corbin (1990) acerca de examinar los datos y los códigos basados en un paradigma de codificación que se centra y relaciona las condiciones causales, el contexto, las condiciones de intervención, las estrategias de acción/interacción y las consecuencias.

La Tabla 3, muestra la categoría que se denominó formas de interpretar como formas de entender en contextos locales grupo 1 que surgió luego del proceso de análisis y codificación abierta y axial. Se denominó en contextos locales puesto que la categoría surgió a partir de las manifestaciones escritas cuando los participantes resolvieron problemas por el método de la pendiente.

Tabla 3. Formas de interpretar como formas de entender la resolución de problemas por el método de la pendiente (grupo 1)

Propiedades (Formas de entender)	Descripción (Código in-vivo) (Formas de interpretar)	Dimensión
El $mcd(a,b)$	Representa la mayor cantidad de grupos con los elementos de los conjuntos que representan a a y b como conjuntos	Tipos de interpretación al $mcd(a,b)$
	Es un proceso de divisiones sucesivas	
	El entero más grande que divide exactamente a a y b	
	$mcd(a,b) = as + bt$ es un proceso de ingeniería inversa al Algoritmo de Euclides	
	$mcd(a,b) = as + bt$ es una función y la pendiente de la recta permite hallar los valores de s y t.	
	Es condición para que la ecuación $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros	
Las soluciones $x = -102 + 7t$, $y = 34 - 2t$	El valor de x es igual a ciento dos negativos más siete veces un valor de (t) perteneciente a los números enteros. El valor de y es igual a treinta y cuatro menos dos veces el valor de (t) perteneciente a los números enteros	Tipos de soluciones a partir de un numero entero como constante más o menos una cantidad de veces t
	Estas dos fórmulas están en función de una misma variable t que al pertenecer a los números enteros va a hacer que los valores de x e y también sean enteros	Tipos de fórmulas como funciones que dependen de una misma variable t
	Son combinaciones lineales que dan solución a la ecuación, siendo t cualquier valor constante en cambiar las soluciones obtenidas.	Tipos de combinaciones lineales donde t determina las soluciones
La letra t en $x = -102 + 7t$, $y = 34 - 2t$	El valor independiente perteneciente a los números enteros donde con este valor se obtienen todas las soluciones particulares (x) e (y)	Permite hallar todas las soluciones
	Permite hallar todas las soluciones a la ecuación y permitirá que haya esa proporcionalidad en cada una de las soluciones respectivas.	Permite que haya proporcionalidad en cada una de las soluciones.
	Representa la variable independiente que permite hallar todas las soluciones particulares de (x) y (y) que permiten dar solución a la ecuación diofántica.	Tipos de números asignados a la variable t

Propiedades (Formas de entender)	Descripción (Código in-vivo) (Formas de interpretar)	Dimensión
Formas de entender la ecuación $6x + 21y = 102$	Seis veces la cantidad de (x) más veintiún veces el valor de (y) es igual a un valor numérico de ciento dos.	Ecuación como relación de variación entre las variables x e y
Infinitas soluciones	Nuevas soluciones a partir de diferencias entre valores de x y valores de y siguiendo la pendiente de la recta	Tipos de soluciones a partir de diferencias enteras
	Los valores de las variables x e y forman sucesiones de números enteros que crecen o decrecen en forma proporcional	Tipos de sucesiones de números enteros

El proceso de recolección y análisis paralelo fue continuo. El grupo 2 hace referencia a la forma de resolver problemas que involucran ecuaciones diofánticas de la forma ax+by=c por el método de fracciones continuas, tareas que corresponden a los experimentos de enseñanza E4, E5 y E6.

En estos experimentos a los participantes se les pidió primero que realizaran la expansión por fracciones continuas de varios números racionales, que hallaran convergentes, que generalizaran el proceso y lo compararan con lo realizado en trabajos anteriores. Por ejemplo, en la Cuestión 13, se les pidió que elaboraran tablas luego de haber realizado la expansión por fracciones continuas de los números racionales 128⁄37, 34⁄21 y 88⁄25, que encontraran relaciones y que generalizaron el proceso de expansión por fracciones continuas. La Figura 4 muestra las tablas elaboradas por el participante 15, que se codificó como P15E5C13:

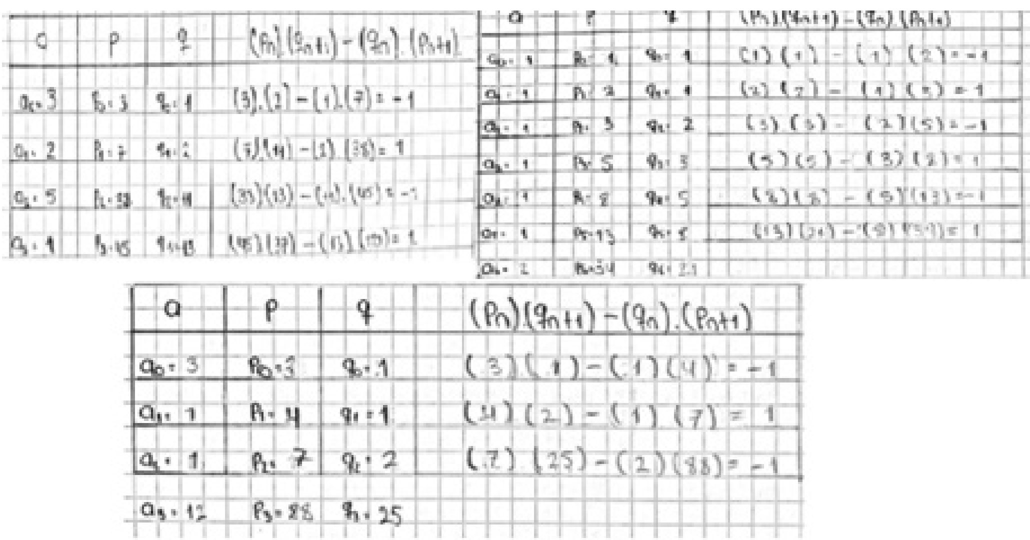


Figura 4. Tablas elaboradas por P15E5C13

En la misma cuestión se exigió que a partir de estas tablas buscaran relaciones entre los valores de p y q para obtener los valores de la tercera columna y qué hallaran una formula o expresión algebraica que generalizara la operación de la tercera columna. El participante codificado como P15, manifestó:

P15: A medida que van aumentando los valores de "q" esta toma los valores siguientes de "p" o sea, que los valores de q_0 serán el mismo valor de p_1, o dicho de otra manera se van intercambiando, el valor de p_1 será el de q_0 y el p_2 será q_1, el de p_3 será el de q_2 y así sucesivamente hasta obtener el último valor de "q".

El valor de "p_n" se multiplica por el valor de "q_{n+1}" con respecto a la que se está hallando, una vez obtenido el resultado de la operación anterior se restará a la multiplicación de la "q_n" por el "p_{n+1}" y se halla el valor de la tercera columna de las anteriores tablas el cual intercala entre positivo y negativo. Esto nos da la fórmula $(p_n).(q_{n+1}) - (q_n).(p_{n+1}) = \pm 1$

La Tabla 4 por su parte, muestra la categoría formas de interpretar como formas de entender la resolución de problemas utilizando las fracciones continuas (grupo 2), como resultado del proceso de codificación axial y selectiva.

Tabla 4. Formas de interpretar como formas de entender la resolución de problemas utilizando las fracciones continuas (grupo 2)

Propiedades (Formas de entender)	**Descripción (Código in-vivo)**	**Dimensión (Formas de interpretar)**
La expansión en fracciones continua $\frac{p}{q}$ de una fracción racional q	Es un proceso de divisiones sucesivas similar al Algoritmo de Euclides.	Tipos de interpretación
	El proceso de expansión termina cuando el valor del producto de la parte entera y el valor de q es igual al de p, es decir cuando $a_n . q_n = p_n$.	
Los números p_i y q_i en el proceso de expansión de la fracción racional $\frac{p}{q}$	Si se toma p_1 y se resta con p_2 se obtiene como resultado p_3. Esto sucede si se toman dos p_n consecutivos va a dar el que sigue a estos. Esto se aplica sin tener en cuenta el p_0. Se puede expresar como $p_n - p_{n+1} = p_{n+2} \;\; / \; n \neq 0$ Si tomamos dos valores de q consecutivos y se suman, va a dar un resultado que va a ser igual al q que está detrás del primero. Se puede expresar $q_{n-1} + q_n = q_{n-2}$	Tipos de secuencias de números enteros para los p_i y q_i

Propiedades (Formas de entender)	Descripción (Código in-vivo)	Dimensión (Formas de interpretar)
Los números p_i y q_i en el proceso de expansión de la fracción racional $\frac{p}{q}$	El primer valor de q pasa a ser el segundo valor de p, y de la misma forma el segundo valor de la columna de q pasa a ser el tercer valor de p y así sucesivamente.	Tipos de relación
	El enésin$C_n = \frac{a_n \cdot p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1}+q_{n-2}}$:uentra con la fórmula: , donde $p_{n-1} = q_{n-1} = 1$ y $p_{n-2} = q_{n-2} = 0$	Tipos de fórmulas
Los números p_n y q_n en el convergente C_n	Si se fija en cuanto varía un C_n se puede ver que siempre va a ser 1 o menor que uno. En el caso que sea 1 puede ocurrir sólo entre el C_0 y C_1 de ahí en adelante siempre será menor que 1 y mayor a 0	Tipo de sucesión de números con valores entre 0 y 1
	La fórmula $p_n . q_{n+1} + q_n \cdot p_{n+1} = \pm 1$ es una solución particular de la ecuación $ax + by = 1$	Tipos de solución particular
	La fórmula: $C_n = \frac{a_n \cdot p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1}+q_{n-2}}$, donde $p_{n-1} = q_{n-1} = 1$ y $p_{n-2} = q_{n-2} = 0$, funciona porque a partir de ejemplos particulares se generaliza.	Tipo de argumento
Prueba	Se conoce precisamente que para todos los casos los valores $q_{-1} = 0$ y $q_{-2} = 1$, luego si se quiere hallar el q_n pues se sabe que a_n tiene un valor, q_{n-1} tiene un valor y q_{n-2} tiene otro valor. Sólo es identificarlos y reemplazarlos en la fórmula. Además, $n \geq 0$, los a_n son las partes enteras que resultan del algoritmo de la división	Tipo de explicación
Las condiciones y variaciones impongan sobre a, b y c en la ecuación $ax + by = c$	Las variaciones en las constantes a, b y c determinan condiciones sobre t según el tipo de solución que se exija a la ecuación.	Tipos de condiciones sobre t

Tercera intervención, Tercer ciclo de codificación y análisis de datos

Recolección y análisis de datos. La recolección de datos siguió, se implementaron los experimentos de aprendizaje E7, E8 y E9 caracterizados por una variedad de problemas retadores en una variedad de contextos, además de realizar la entrevista semiestructurada retrospectiva. Los problemas son retadores en el sentido que exigen creatividad, ingenio y estrategias de generalización para ser resueltos. Por ejemplo, el problema: ¿Qué condiciones deben imponerse a los números enteros a y b para que la solución lineal diofántica ax+by=c tenga únicamente cuatro soluciones en los números enteros positivos?

El proceso de codificación selectiva se realizó a un nivel más abstracto centrado en el propósito de construir la teoría sustantiva que luego condujo a la teoría formal. La Tabla 5, muestra la categoría que se denominó formas de entender como formas de pensar la resolución de problemas en contexto local 1, como núcleo de la teoría sustantiva cuando los participantes resolvieron problemas usando el método de la pendiente.

Tabla 5. Formas de entender como formas de pensar la resolución de problemas en contexto local 1

Propiedades (Formas de pensar)	**Dimensión (Formas de entender)**	**Descripción**
Estrategias variacionales en la solución de ecuaciones $ax + by = c$	Tipo de transformación	Acciones/interacciones que tienen como propósito resolver un problema que involucra una EDL de la forma $ax + by = c$
	Tipo de formalización	
	Tipo de prueba	
	Formas de verificar	
	Secuencia de acciones	

Mientras que la Tabla 6, muestra la categoría formas de entender como formas de pensar la resolución de problemas en contexto local 2 como núcleo de la teoría sustantiva cuando los estudiantes resolvieron problemas utilizando las fracciones continuas.

Tabla 6. Formas de entender como formas de pensar la resolución de problemas en contexto local 2

Propiedades (Formas de pensar)	**Dimensión (Forma de entender)**	**Descripción**
Estrategias variacionales en la resolución de problemas que involucran ecuaciones $ax + by = c$	Tipo de transformación	Variedad de acciones/interacciones que tienen como propósito resolver un problema que involucra una EDL de la forma $ax + by = c$
	Tipo de formalización	
	Tipo esquema de prueba	
	Generalización variacional	
	Formas de verificar	
	Secuencia de acciones	
Estrategias de generalización	Generalización por inducción	Tipos de condiciones impuestas sobre los coeficientes de la ecuación determinan los tipos de solución.

Propiedades (Formas de pensar)	Dimensión (Forma de entender)	Descripción
Estrategias de prueba	Prueba empírica	Tipos de argumentos, ejemplos y explicaciones a partir de los cuales se convence acerca de la verdad de las propiedades de la expansión en fracciones continuas de fracciones racionales
		Variedad de argumentos y ejemplos para convencer acerca las variaciones en los coeficientes de la ecuación $ax + by = c$ que determinan el tipo de solución.

Resultados

La saturación teórica. Los procesos de codificación de los experimentos de enseñanza E7, E8 y E9, así como la entrevista retrospectiva semiestructurada condujeron del muestreo teórico a la saturación teórica como núcleo de la teoría. Es decir, cuando nuevos datos provenientes de diversas fuentes no aportaron más a la categoría central y a las subcategorías ya construidas. Como evidencia acerca de cómo se saturó se transcribe parte de la entrevista del estudiante codificado como P15, allí PI significa profesor investigador.

PI: Si nosotros tenemos la ecuación lineal diofántica ax+by=c y queremos o exigimos que tenga un número determinado de soluciones, por ejemplo, en los enteros positivos. ¿Explíquenos cómo se haría eso, o cómo respondió esta cuestión?

E15: Eso es para hallar un numero de n soluciones al sistema, entonces lo primero que procedemos hacer es hallar las soluciones generales del sistema trabajando de forma general para primero avanzar y luego retroceder. Entonces tenemos una ecuación ax+by=c entonces por el método de pendiente y solución particular hallamos lo que son las soluciones generales, entonces x es igual a la solución particular en x más delta de x, y a la solución particular en y menos delta de y. Entonces como necesitamos hallar soluciones particulares en los positivos, entonces hacemos tanto a x como a y mayor a cero.

Comentario y análisis. Aunque no se evidencia de forma explícita el participante explica como a partir de una solución particular de la ecuación y utilizando la pendiente de la función surgen nuevas soluciones de la forma (x+Δx,y-Δy). Es decir, muestra una forma de sustituir y combinar utilizando la pendiente para transformar una solución conocida en una nueva solución a la ecuación.

La Figura 5 evidencia las manifestaciones escritas del P18 al resolver la cuestión 1 del experimento E9. En esta figura se evidencia la forma en que el participante establece relaciones que lo llevaron generalizar y probar teniendo como fundamento la forma como resolvieron problemas en contextos locales. Datos como los de este participante contribuyeron en la saturación teórica.

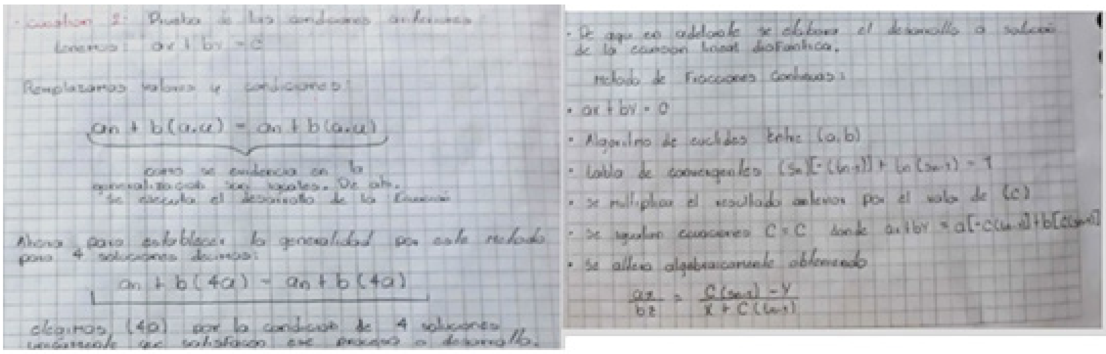


Figura 5. Generalizando y probando P18E8C1

La categoría central como núcleo de la teoría. El esquema de la Figura 5, muestra la categoría central que se denominó formas de entender y pensar variacional la resolución de problemas. Se caracterizó como un proceso que va desde la interpretación como forma de entender la resolución de problemas en contextos locales a establecer relaciones, crear estrategias para la generalización y la prueba como formas de pensar la resolución de problemas en una variedad de contextos.

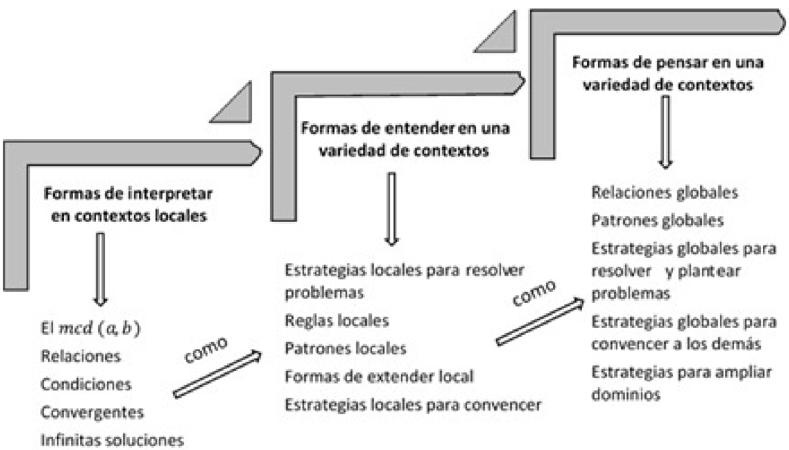


Figura 6. Formas de entender como formas de pensar variacional la resolución de problemas.

Hallazgos y Discusión

Generalmente los profesores de matemáticas prevén y esperan que los estudiantes resuelvan problemas como ellos lo hacen. En contraste el trabajo realizado evidencia las acciones de los estudiantes cuando utilizaron números enteros para reemplazar y combinar las constantes a y b, y/o las variables x e y, analizaron y encontraron reglas, patrones y fórmulas para determinar un número entero c en función de los números a y b de acuerdo con el tipo de soluciones exigidas a la ecuación. Es decir, las formas como lograron interpretar para entender y luego entender para pensar la resolución de problemas.

Se destaca la forma en que elaboraron nexos, construyeron relaciones en la forma de resolver un problema nuevo a partir de problemas anteriores. La manera de organizar y reorganizar acciones e interacciones para investigar relaciones, patrones y representarlos mediante fórmulas o expresiones algebraicas, esto los condujo a generalizar estrategias como formas de entender en contextos locales a formas de pensar la resolución de problemas en una variedad de contextos.

Estas manifestaciones escritas de los participantes posibilitaron caracterizar la teoría como un proceso desde la variación y el cambio. Por ejemplo, un primer estado lo conforman las formas de interpretar como formas de entender la resolución de problemas en contextos locales. Estas acciones condujeron a los estudiantes a formas de pensar la resolución de problemas en una variedad de contextos como cambios de estado que van desde las formas de interpretar, entender, generalizar y probar como formas de pensar la resolución de problemas en contextos variados.

Estas formas de pensar buscando y explorando relaciones desde la variación y el cambio (aunque aquí no se explican al detalle) están inmersas en las fases de resolución de problemas propuestas por Polya (1945, 1981), Mason et al. (2010), Mayer (2010), Schoenfeld (2016), la posible diferencia es que estos autores hicieron sus propuestas para cualquier tipo de problemas, mientras que los resultados aquí presentados corresponden un tipo de problemas especificos.

Además, como lo afirma Polya (1945) y Mayer (2010) los participantes se comprometieron en actos cognitivos que los condujo a resolver los problemas, cada uno a su manera. Estos actos cognitivos pueden ser vistos desde las operaciones del pensamiento matemático propuesto por Burton (1984) o los actos mentales de Harel (2008b, 2008c, 2010); Harel y Sowder (2005), acerca de las formas de interpretar como formas de entender y las formas de entender como formas de pensar sobre problemas. Como lo afirman Berth y Piaget (1966) y Norton (2022) los participantes hicieron matemáticas y pensaron matemáticamente.

Para futuras investigaciones sería interesante explorar y buscar explicaciones acerca del porqué de los casos negativos, es decir los estudiantes que no lograron o se les dificultó elaborar relaciones, buscar nexos, construir generalizaciones y resolver problemas. Esto con el propósito de generar estrategias para contribuir en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Finalmente, y desde una mirada subjetiva, los autores consideran que la teoría construida puede ser diferente desde la óptica de otros investigadores, con diferentes problemas en diferentes contextos, puesto que el trabajo realizado estuvo centrado en interpretar y dar sentido a las manifestaciones escritas y verbales de los participantes.

Referencias

Berth, E. y Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Reidel.

Bryant, A. y Charmaz, K. (2019). *The SAGE Handbook of Current Developments in Grounded Theory*. SAGE Publications. https://doi.org/10.4135/9781526485656

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. Journal for Research in Mathematics. *Education, 15*(1), 35-49. https://doi.org/10.2307/748986

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). *Basics of qualitative research.* Sage publications.

Corbin, J. y Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research:Techniques and procedures for developing grounded theory* (3ª. ed.). Sage Publications.

Corbin, J. y Strauss, A. (2017). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (4ª. ed.). Sage Publications.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11, pp. 25-41). Springer.

Ernest, P. (1993). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. *Science & Education, 2*(1), 87-93.

Falk, M. (1994). Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas, 1*(1), 35-59.

Gagne, R. (1965). *The Conditions of Learning.* Holt, Rinehart and Winston.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics, 1*(3), 4-11.

Harel, G. (2008a). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. En B. Gold y R. Simons (Edits.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and Philosophy* (pp. 265-290). Mathematical Association of America.

Harel, G. (2008b). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focuson Proving, Part I. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 47,* 487-500.

Harel, G. (2008c). A DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40*, 893-907. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0146-4

Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. En B. Sriraman y L. English (eds). *Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 343-367). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_34

Harel, G. (2013). Intellectual Need. En K. Leatham (ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_6

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3

Koshy, T. (2007). *Elementary number theory with applications* (2ª. ed.). Academic Press is an imprint of Elsevier.

Kupisiewicz, C. y Choluj, M. (1964). *O efektívnosti problémového vyučovania: výskum vyučovacích metód matematicko-prírodovedných predmetov.* Slov. pedagog. nakl

Mason, J., Burton, L.y Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2ª. ed.). Pearson Education Limited.

Mayer, R. (2010). Problem Solving and Reasoning. *International Encyclopedia of Education,* 273-278. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044894-7.00487-5

Morgan, C. T. (2010). *Psikolojiye Giriş*. Eğitim Yayınevi.

Norton, A. (2022). *The Psychology of Mathematics: A Journey of Personal Mathematical Empowerment for Educators and Curious Minds* (1ª. ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003181729

Polya, G. (1945). *How To Solve It*. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery.* Wiley.

Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education* (1ª. ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203062685

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS, 47*(6), 641-649.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1- 38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Soto, O., Siy, K. y Harel, G. (2022). Promoting a set-oriented way of thinking in a U.S. High School discrete mathematics class: a case study. *ZDM Mathematics Education, 54,* 809-827. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01337-7

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh y A. E. Kelly (eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Erlbaum.